Compito di trigonometria e goniometria

modello A

$$\tan 2a - \tan a = \frac{1}{2}\sec^2 a \tan 2a$$

$$\frac{\sin 2a}{\cos 2a} - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{2\cos^2 a}\frac{\sin 2a}{\cos 2a}$$

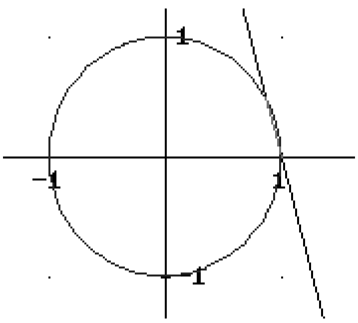
$$\frac{\sin 2a \cos a - \sin a \cos 2a}{\cos 2a \cos a} = \frac{2\sin a \cos a}{2\cos 2a \cos^2 a}$$

$$\sin(2a - a) = \sin a$$

tan x =1

Si tratta di una equazione elementare che ha per radice x=π/4 + kπ

($\sqrt{3}$ –2) sin x –cosx +1=0



Poniamo *s*=sin x e *c*= cos x e scriviamo il sistema

$$\begin{cases}(\sqrt{3}-2)s - c + 1 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1\end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano *sc* passa per i punti (1,0) e (0, 1/(2–$\sqrt{3}$)).

Ricavando $c = (\sqrt{3}-2)s + 1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$\left((\sqrt{3}-2)s+1\right)^2 + s^2 = 1$$

$$(7-4\sqrt{3})s^2 + 1 + 2(\sqrt{3}-2)s + s^2 = 1$$

$$(8-4\sqrt{3})s^2 + 2(\sqrt{3}-2)s = 0$$

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{2(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono x=2k π e x= π/6 +2kπ

cos x = $\sqrt{2}$ sin x cos x

Portando al primo membro e raccogliendo a fattor comune il coseno di x si ha

$$\cos x(1-\sqrt{2}\sin x) = 0$$

$$\cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui x=π/2+k π ∨ x=π/4 +2kπ ∨ x=3/4π+2kπ

Determina perimetro e area del quadrilatero ABCD dove gli angoli DAB, CAB, ABD e DBC sono di 80°, 20°, 30° e 100° e il lato AB unitario.

Per il teorema dei seni si ha che

AD=sin(30°)/sin(70°) ≅ 0.53

AC=sin(130°)/sin(30°) ≅1.53

BC= sin(20°)/sin(30°) ≅ 0.68

Con il teorema di Carnot pertanto DC ≅ 1.34. Il perimetro è 3.55 e l'area 0.61.

modello B

$$\frac{1+\tan a}{1-\tan a}=\frac{\cos 2a}{1-\sin 2a}$$

$$\frac{1+\frac{\sin a}{\cos a}}{1-\frac{\sin a}{\cos a}}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{1-\sin 2a}$$

$$\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}=\frac{(\cos a-\sin a)(\cos a+\sin a)}{1-2\sin a\cos a}$$

$$\frac{1}{\cos a-\sin a}=\frac{\cos a-\sin a}{1-2\sin a\cos a}$$

$$1-2\sin a\cos a=(\cos a-\sin a)^2$$

$$1-2\sin a\cos a=\cos^2 a+\sin^2 a-2\sin a\cos a$$

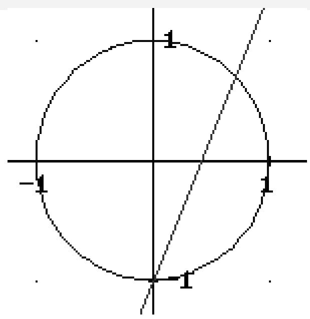
$$1=\sin^2 a+\cos^2 a$$

$1-\tan^2 x=0$

Equazione riconducibile alle equazioni elementari tan x = ±1 e pertanto x=π/4+kπ/2

$\sin x-(1+\sqrt{2})\cos x+1=0$

Poniamo *s*=sin x e *c*= cos x e scriviamo il sistema



$$\begin{cases} s-(1+\sqrt{2})c+1=0 \\ c^2+s^2=1 \end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano *sc* passa per i punti (0,–1) e (1/(1+$\sqrt{2}$),0)). Ricavando $s=(\sqrt{2}+1)c-1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$c^2+\left[(\sqrt{2}+1)c-1\right]^2=1$$

$$c^2+(3+2\sqrt{2})c^2-2(\sqrt{2}+1)c+1=1$$

$$2(2+\sqrt{2})c^2-2(\sqrt{2}+1)c=0$$

$$c_1=0$$

$$c_2=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-2)}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono x=3/2π+2k π e x= π/4 +2kπ

$\cos 2x=\sin 2x$

Ponendo 2x=y si ha l'equazione omogenea siny=cosy che è risolta per y=π/4+kπ; pertanto 2x=π/4+kπ → x=π/8+kπ/2

Il triangolo di lati 5,4 e 7 è ottusangolo? Perché?
Il triangolo è ottusangolo perché applicando il teorema di Carnot si ha che
$7^2=4^2+5^2-2*4*5\cos\theta \rightarrow 49=41-40\cos\theta \rightarrow \cos\theta=-1/5 \rightarrow \theta$ è un angolo ottuso.

modello C

$$\frac{\tan 2a+\sin 2a}{\cos^2 a}=\frac{\tan 2a-\sin 2a}{\sin^2 a}$$

$$\frac{\frac{\sin 2a}{\cos 2a}+\sin 2a}{\cos^2 a}=\frac{\frac{\sin 2a}{\cos 2a}-\sin 2a}{\sin^2 a}$$

$$\frac{\sin 2a+\sin 2a\cos 2a}{\cos 2a\cos^2 a}=\frac{\sin 2a-\sin 2a\cos 2a}{\cos 2a\sin^2 a}$$

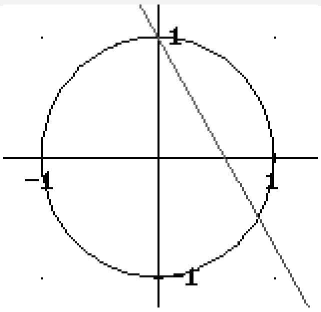
$$\frac{\sin 2a(1+\cos 2a)}{\cos^2 a}=\frac{\sin 2a(1-\cos 2a)}{\sin^2 a}$$

$$\frac{1+\cos^2 a-\sin^2 a}{\cos^2 a}=\frac{1-\cos^2 a+\sin^2 a}{\sin^2 a}$$

$$2=2$$

$1/\tan x=\sqrt{3}$
Segue che $\tan x=1/\sqrt{3} \rightarrow x=\pi/6+k\pi$

$\sqrt{3}\sin x+3\cos x-\sqrt{3}=0$



Poniamo s=sin x e c= cos x e scriviamo il sistema

$$\begin{cases}\sqrt{3}s+3c-\sqrt{3}=0\\ c^2+s^2=1\end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano sc passa per i punti (0, 1) e $(1/\sqrt{3}, 0)$). Ricavando $s=-\sqrt{3}c+1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$c^2+\left[1-\sqrt{3}c\right]^2=1$$

$$c^2+1+3c^2-2\sqrt{3}c=1$$

$$4c^2-2\sqrt{3}c=0$$

$$c_1=0$$

$$c_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono $x=\pi/2+2k\pi$ e $x=-\pi/6+2k\pi$

$(\sqrt{3}-2\sin x)(\sqrt{3}-2\cos 2x)=0$
L'equazione si può ricondurre a due equazioni elementari:

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x=\pi/3+2k\pi \vee x=2/3\pi+2k\pi$

$\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ → 2x=±π/6+kπ → x=±π/12 + kπ/2

Determina perimetro e area del triangolo ABC dove AB=1 e gli angoli in A e B sono di 30° e di 45°

Per il teorema dei seni l'area di un triangolo di lato *L* e con gli angoli adiacenti α e β vale

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2} L^2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Pertanto nel nostro caso l'area vale $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 30° \sin 45°}{\sin 75°} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \approx 0.183$

modello D

$$\sin(30° - a) + \cos(30° + a) = \frac{(1+\sqrt{3})\cos 2a}{2(\cos a + \sin a)}$$

$$\frac{1}{2}\cos a - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a + \frac{1}{2}\sin a = \frac{(1+\sqrt{3})(\cos^2 a - \sin^2 a)}{2(\cos a + \sin a)}$$

$$\cos a \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \sin a \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})(\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)}{2(\cos a + \sin a)}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos a - \sin a) = \frac{(1+\sqrt{3})(\cos a - \sin a)}{2}$$

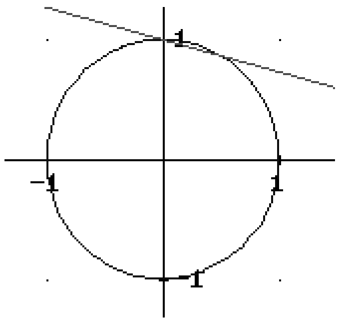
$3 - 4 \sin^2 x = 0$

Equazione riconducibile alle due elementari

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

che ammettono per radici i numeri x=±π/3+2kπ ∨ x=±2/3π+2kπ

$(\sqrt{3} - 2) \cos x - \sin x + 1 = 0$



Poniamo *s*=sin x e *c*= cos x e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} (\sqrt{3}-2)c - s + 1 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano *sc* passa per i punti (0, 1) e (1/(2–$\sqrt{3}$),0)). Ricavando $s = (\sqrt{3}-2)c + 1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$c^2 + \left[(\sqrt{3}-2)c + 1\right]^2 = 1$$

$$c^2 + (7 - 4\sqrt{3})c^2 + 2(\sqrt{3}-2)c + 1 = 1$$

$$4(2-\sqrt{3})c^2 + 2(\sqrt{3}-2)c = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono x=π/2+2k π e x= π/3 +2kπ

cos 2x = sin x
Sviluppando cos2x si ha
$1-2\sin^2 x=\sin x$
$2s^2 +s -1=0$
$s = -1 \vee s=1/2 \to x=k\pi \vee x=\pi/6+2k\pi \vee x=5/6\pi+2k\pi$

Determina perimetro e area del triangolo ABC dove AB=9, AC=7 e il coseno dell'angolo in C vale 2/7
Chiamando con x la misura del lato BC si ha per il teorema di Carnot

$$9^2 = 7^2 + x^2 - 2\cdot 7x\frac{2}{7}$$

$$81 = 49 + x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+32} = 2 \pm 6 = \{8,-4\}$$

Pertanto la misura accettabile di BC è 8. Il perimetro sarà 24 e l'area, con la formula di Erone è

$$A = \sqrt{12\cdot 4\cdot 3\cdot 5} = 12\sqrt{5}$$

Ora … *fate vobis*

modello E

$$\tan 2b - \tan b = \frac{\tan 2b}{2\cos^2 b}$$

$3\tan^2 x =1$

$\sin x -(\sqrt{2} +1)\cos x +1=0$

$3\sin^2 x-\cos^2 x = 0$

Il triangolo di lati 5,6 e 7 è ottusangolo? Perché?

modello F

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$$

$4\cos^2 x =1$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

sin 2x =sin 3x

Determina perimetro e area del triangolo ABC dove AB=3 e gli angoli in A e B sono di 60 e 75 gradi