Soluzioni

esercizio uno   Dimostrare il carattere convergente della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{n+2}}{n\,4^{2n+3}}$$

e descrivere l'ambiente informatico e le procedure minime necessarie per l'approssimazione della somma della serie stessa a meno di una precisione ε

Per dimostrare il carattere convergente della somma ricorriamo al criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+3}}{(n+1)4^{2n+5}}\,\frac{n4^{2n+3}}{5^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{(n+1)\,4^2} = \frac{5}{16} < 1$$

pertanto il limite esiste finito, non nullo e minore dell'unità → la serie converge
Per calcolarne la somma conviene esplicitare il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{5n}{16(n+1)} \to \begin{cases} a_1 = -\dfrac{5^3}{4^5} \\ a_{n+1} = -\dfrac{5n}{16(n+1)}a_n \quad n>1 \end{cases}$$

dando luogo ad una definizione itero-ricorsiva della successione.
In ambiente Derive (c) si può definire

```
somma_la_serie(precisione:=0.0001):=Prog(
        n:=1;
        a:=-5^3/4^5,
        s:=a,
        loop(
                a:=-5*n/(16+16*n)*a,
                s :+ a,
                n :+1,
                if( abs(a)<precisione,return([s,n]))
        )
)
```

In ambiente spreadsheet si possono impostare le seguenti formule

	A	B	C
1	n	a(n)	s(n)
2	1	=-5^3/4^5	=B2
3	=A2+1	=-5*A2/(16+16*A2)*B2	=C2+B3
4	=A3+1	=-5*A3/(16+16*A3)*B3	=C3+B4
5	=A4+1	=-5*A4/(16+16*A4)*B4	=C4+B5
6	=A5+1	=-5*A5/(16+16*A5)*B5	=C5+B6
7	=A6+1	=-5*A6/(16+16*A6)*B6	=C6+B7
8	=A7+1	=-5*A7/(16+16*A7)*B7	=C7+B8
9	=A8+1	=-5*A8/(16+16*A8)*B8	=C8+B9
10	=A9+1	=-5*A9/(16+16*A9)*B9	=C9+B10
11	=A10+1	=-5*A10/(16+16*A10)*B10	=C10+B11
12	=A11+1	=-5*A11/(16+16*A11)*B11	=C11+B12
13			

che generano i numeri

	A	B	C
1	n	a(n)	s(n)
2	1	-0.122070313	-0.122070313
3	2	0.019073486	-0.102996826
4	3	-0.003973643	-0.106970469
5	4	0.000931323	-0.106039147
6	5	-0.000232831	-0.106271977
7	6	6.0633E-05	-0.106211344
8	7	-1.6241E-05	-0.106227585
9	8	4.44089E-06	-0.106223144
10	9	-1.23358E-06	-0.106224378
11	10	3.46945E-07	-0.106224031
12	11	-9.85638E-08	-0.10622413

esercizio due Approssimare a meno di un centesimo il valore dell'integrale definito

$$\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x}\ dx$$

attraverso lo sviluppo in serie della funzione stessa.
Facoltativo: stendere una *function* in un linguaggio a piacere che approssimi tale valore a meno di una precisione ε passata in ingresso.

Passando dagli sviluppi di Taylor si ha che

$$\int_0^1 \cos x^{1/3} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\frac{2}{3}n}}{(2n)!}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^{\frac{2}{3}n}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{3}{2n+3} \approx$$

$$1 - \frac{3}{10} + \frac{1}{56} - \frac{1}{2160} + \frac{1}{147840} \approx 0.7174008804$$

Per automatizzare la somma definiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{2n+3}{2n+5} = -\frac{2n+3}{(2n+1)(2n+2)(2n+5)}$$ con $a_0=1$. Pertanto

In ambiente Derive(c)

```
integrale(precisione:=0.00001):=Prog(
   n:=0,
   a:=1,
   s:=a,
   loop(
         a:=-(2n+3)/((2n+1)(2n+2)(2n+5))*a,
         s :+a,
         n :+1,
         if(abs(a)<precisione, return([s,n]))
    )
)
```

In ambiente VB

```
function app_int(optional eps=0.0001)
         n=0
         a=1
         s=a
         Do
              a=-(2n+3)/((2n+1)(2n+2)(2n+5))*a
              s=s+a
              n=n+1
         Loop until abs(a)<eps or n>1000
         app_int=iif(n<1000,s,"calcolo impreciso")
end function
```

esercizio tre Calcola i primi 5 coefficienti dello spettro dello sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x)=|x|$$

di semiperiodo π.
Facoltativo: impostare in ambiente Derive (c) le istruzioni minime necessarie per il calcolo della ridotta m-esima dello sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica qualsiasi.

Essendo la funzione pari ($f(-x)=f(x)$) i coefficienti $b_k=0\ \forall k$. Pertanto

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x \operatorname{sen} kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right\}_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

Pertanto lo spettro sarà

k	a_k	b_k
0	π	
1	–4/π	0
2	0	0
3	–4/(9π)	0
4	0	0
5	–4/(25π)	0

Le istruzioni per l'ambiente Derive(c) sono

```
k ∈ Integer (0, inf)
a0(f, T) := 1/T·INT(f, x, -T, T)
a(f, T, k) := 1/T·INT(f·COS(k·pi/T·x), x, -T, T)
b(f, T, k) := 1/T·INT(f·SIN(k·pi/T ·x), x, -T, T)
sviluppo(f, T, m) := a0(f, T)/2 + SUM(a(f, T, k)·COS(k·pi/T ·x) + b(f, T, k)·SIN(k·pi/T·x), k, 1, m)
```