Esercizi svolti con le tangenti alle coniche

metodo del fascio proprio di rette

Determinare le tangenti alla conica

$$x^2 + 3y - 1 = 0$$

uscenti dal punto (0,1)

Il fascio proprio di rette uscenti dal punto ha equazione

$$y = mx + 1$$

che messo a sistema con l'equazione della conica restituisce l'equazione parametrica di secondo grado nella variabile x

$$x^2 + 3mx + 2 = 0$$

Le radici di tale equazione rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della conica con la retta generica del fascio. Affinchè tali rette siano tangenti è sufficiente che le ascisse dei punti di contatto siano coincidenti e pertanto che il discriminante dell'equazione parametrica sia nullo:

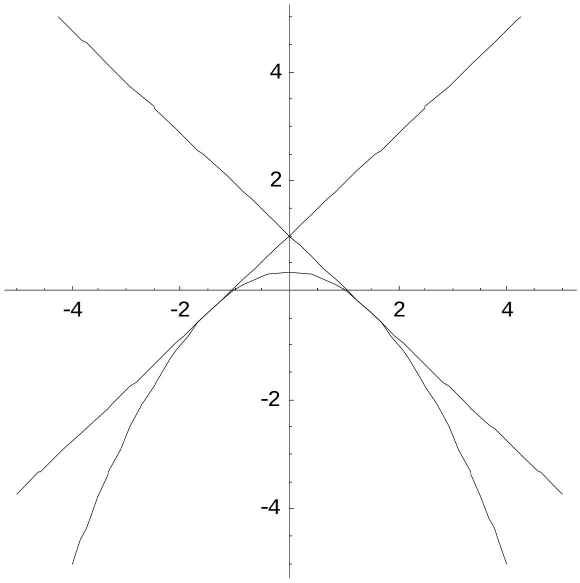
$$\Delta = 9m^2 - 8 = 0$$

I valori del parametro m che rendono possibile la coincidenza delle ascisse sono

$$\left\{m \to -\frac{2\sqrt{2}}{3},\ m \to \frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$$

che sostituiti nell'equazione del fascio restituiscono le equazioni delle rette tangenti

$$\left\{y == 1 - \frac{2\sqrt{2}\,x}{3},\ y == \frac{2\sqrt{2}\,x}{3} + 1\right\}$$



Determinare le tangenti alla conica

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

uscenti dal punto (–1,0)

Il fascio proprio di rette uscenti dal punto ha equazione

$$y = m(x+1)$$

che messo a sistema con l'equazione della conica restituisce l'equazione parametrica di secondo grado nella variabile x

$$(m-1)^2 + (m^2+1)x^2 + 2(m^2 - m - 1)x = 0$$

Le radici di tale equazione rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della conica con la retta generica del fascio. Affinchè tali rette siano tangenti è sufficiente che le ascisse dei punti di contatto siano coincidenti e pertanto che il discriminante dell'equazione parametrica sia nullo:

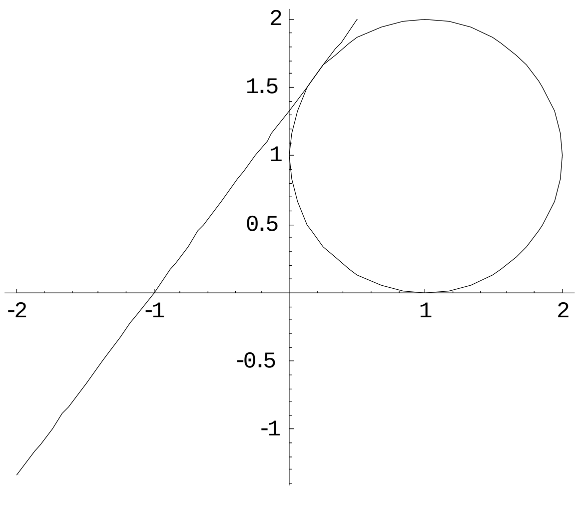
$$\Delta = 16m - 12m^2 = 0$$

I valori del parametro m che rendono possibile la coincidenza delle ascisse sono

$$\left\{m \to 0,\ m \to \frac{4}{3}\right\}$$

che sostituiti nell'equazione del fascio restituiscono le equazioni delle rette tangenti

$$\left\{y == 0,\ y == \frac{4(x+1)}{3}\right\}$$



Determinare le tangenti alla conica

$$x-(1-y)(y+3)=0$$

uscenti dal punto (4,0)

Il fascio proprio di rette uscenti dal punto ha equazione

$$y=m(x-4)$$

che messo a sistema con l'equazione della conica restituisce l'equazione parametrica di secondo grado nella variabile x

$$x^2 m^2+16m^2-8m-(8m^2-2m-1)x-3=0$$

Le radici di tale equazione rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della conica con la retta generica del fascio. Affinchè tali rette siano tangenti è sufficiente che le ascisse dei punti di contatto siano coincidenti e pertanto che il discriminante dell'equazione parametrica sia nullo:

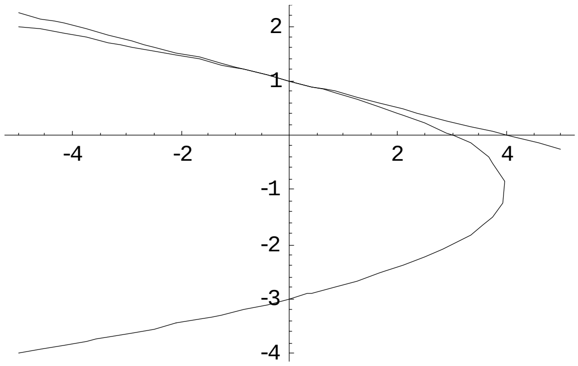
$$\Delta=4m+1=0$$

Il valore unico del parametro m che rende possibile la coincidenza delle ascisse è

$$\left\{m\to-\frac{1}{4}\right\}$$

che sostituito nell'equazione del fascio restituisce l' equazione della retta tangente

$$\left\{y==\frac{4-x}{4}\right\}$$



Determinare le tangenti alla conica

$$x(y-1)-1=0$$

uscenti dal punto (1,2)

Il fascio proprio di rette uscenti dal punto ha equazione

$$y=m(x-1)+2$$

che messo a sistema con l'equazione della conica restituisce l'equazione parametrica di secondo grado nella variabile x

$$mx^2-(m-1)x-1=0$$

Le radici di tale equazione rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della conica con la retta generica del fascio. Affinchè tali rette siano tangenti è sufficiente che le ascisse dei punti di contatto siano coincidenti e pertanto che il discriminante dell'equazione parametrica sia nullo:

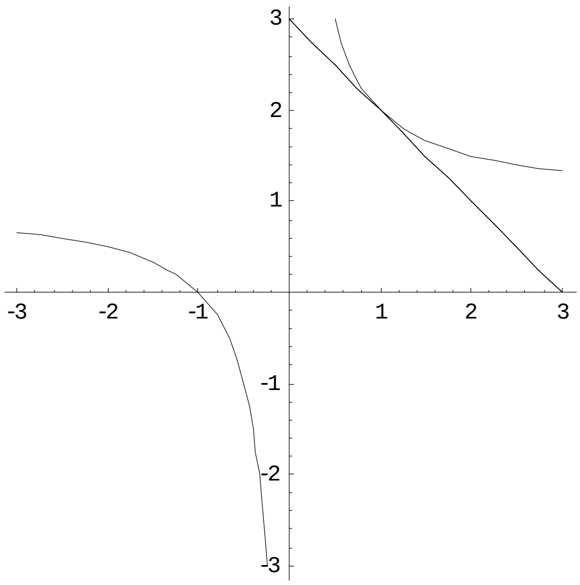
$$\Delta=m^2+2m+1=0$$

Il valore unico del parametro m che rende possibile la coincidenza delle ascisse è

$$\{m\to-1,\ m\to-1\}$$

che sostituito nell'equazione del fascio restituisce l' equazione della retta tangente

$$\{y==3-x,\ y==3-x\}$$



Determinare le tangenti alla conica

$$x^2 - (y-1)^2 - 1 = 0$$

uscenti dal punto (0,0)

Il fascio proprio di rette uscenti dal punto ha equazione

$y = mx$

che messo a sistema con l'equazione della conica restituisce l'equazione parametrica di secondo grado nella variabile x

$-(m^2 - 1)x^2 + 2mx - 2 = 0$

Le radici di tale equazione rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della conica con la retta generica del fascio. Affinchè tali rette siano tangenti è sufficiente che le ascisse dei punti di contatto siano coincidenti e pertanto che il discriminante dell'equazione parametrica sia nullo:

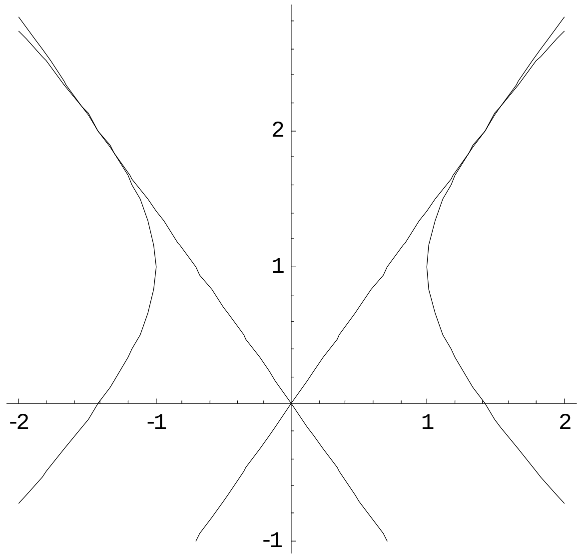
$\Delta = 8 - 4m^2 = 0$

I valori del parametro m che rendono possibile la coincidenza delle ascisse sono

$\{m \to -\sqrt{2},\ m \to \sqrt{2}\}$

che sostituiti nell'equazione del fascio restituiscono le equazioni della rette tangenti

$\{y == -\sqrt{2}\, x,\ y == \sqrt{2}\, x\}$



Determinare le tangenti alla conica

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

uscenti dal punto (1,1)

Il fascio proprio di rette uscenti dal punto ha equazione

$y = m(x-1) + 1$

che messo a sistema con l'equazione della conica restituisce l'equazione parametrica di secondo grado nella variabile x

$2m^2 - 4(m-1)xm - 4m + (2m^2 + 1)x^2 + 1 = 0$

Le radici di tale equazione rappresentano le ascisse dei punti di intersezione della conica con la retta generica del fascio. Affinchè tali rette siano tangenti è sufficiente che le ascisse dei punti di contatto siano coincidenti e pertanto che il discriminante dell'equazione parametrica sia nullo:

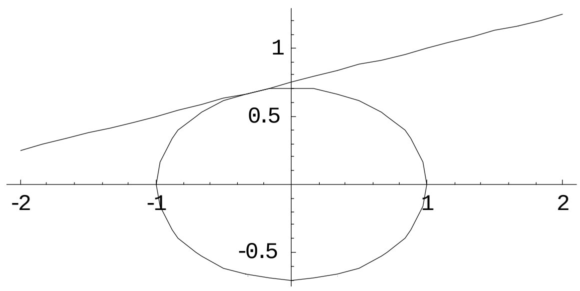
$\Delta = 16m - 4 = 0$

Il valore del parametro m che rende possibile la coincidenza delle ascisse vale

$\left\{m \to \frac{1}{4}\right\}$

che sostituito nell'equazione del fascio restituisce

$\left\{y == \frac{x-1}{4} + 1\right\}$



Tale metodo non restituisce la tangente verticale di equazione x=1 perché non può essere espresso in forma esplicita.

In tale caso si preferisce adottare il metodo della polare come si vedrà in altra pubblicazione.