Una serie e una successione molto particolari

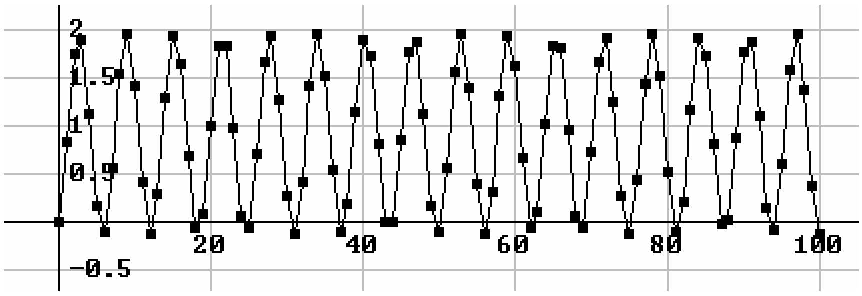
Mi sono imbattuto negli esercizi sulle serie numeriche nella serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$$

che rappresenta un bellissimo esempio di serie a carattere indeterminato: non è infatti né divergente e né convergente. Infatti la successione $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, non è a segni alterni, non è sempre positiva o negativa e nemmeno monotona crescente o decrescente. Il comportamento tuttavia della ridotta m-esima tuttavia mi ha incuriosito e ho definito con Derive la funzione

$$s(m) := \sum_{n=0}^{m} \mathrm{SIN}(n)$$

e tabulandone i primi 100 valori



ho rilevato che il comportamento è decisamente altalenante, anche se fa “presagire” una certa regolarità.

Ho allora ipotizzato che

$$s_n = A\sin n + B\cos n + C$$

ovvero, risultasse una combinazione lineare fra sin n e cos n a meno di una costante. In questo senso, per determinare i valori di A, B e C ho utilizzato la relazione ricorsiva

$$s_{n+1} - s_n = \sin(n+1)$$

e sviluppando i relativi termini si ha che

$$\left[B(\cos 1 - 1) + A\sin 1\right]\cos n + \left[A(\cos 1 - 1) - B\sin 1\right]\sin n = \sin n\cos 1 + \sin 1\cos n$$

Applicando allora il principio di identità fra i polinomi trigonomentrici e considerando che $s_0=0$ si ottiene un sistema lineare in A, B e C

$$\begin{cases} A\sin 1 - B(1-\cos 1) = \sin 1 \\ A(\cos 1 - 1) - B\sin 1 = \cos 1 \\ B + C = 0 \end{cases}$$

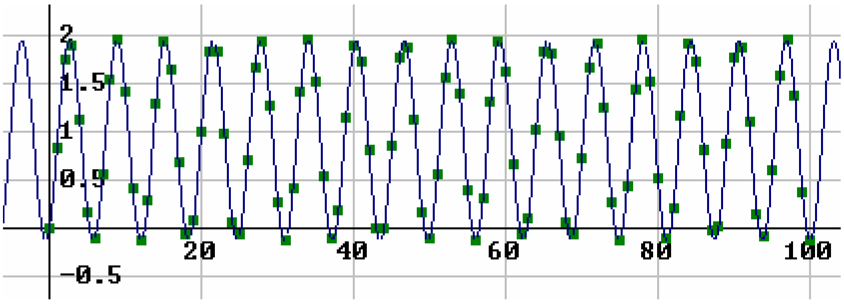
che risolto restituisce

$$A = 1/2 \quad B = -C = \frac{\sin 1}{2(\cos 1 - 1)}.$$

Pertanto

$$s_n = \frac{1}{2}\sin n + \frac{\sin 1}{2(\cos 1 - 1)}(\cos n - 1).$$

Disegnando la curva appena trovata in funzione di n



si verifica che interpola tutti i punti precedentemente trovati.

Si può ulteriormente dimostrare nello stesso modo che

$$s_{n,\alpha} = \sum_{j=0}^{n} \sin(\alpha j) = \frac{1}{2}\sin(\alpha n) + \frac{\sin\alpha}{2(\cos\alpha - 1)}(\cos(\alpha n) - 1)$$

e che

$$c_{n,\alpha} = \sum_{j=0}^{n} \cos(\alpha j) = \frac{1+\cos a}{2\sin\alpha}\sin(\alpha n) + \frac{1}{2}(1+\cos(\alpha n))\,.$$

Segue allora che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(\alpha n)$$

diverge: non è infatti infinitesima ed è a termini non negativi. Possiamo anche determinare l'espressione analitica della ridotta

$$r_{m,\alpha} = \sum_{n=0}^{m} \sin^2(\alpha n) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1-\cos(2\alpha n)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{m} 1 - \sum_{n=0}^{m} \cos(2\alpha n)\right) = \frac{1}{2}(m+1-c_{m,2\alpha})$$

che si comporta asintoticamente come ½ m.

Mi soffermerei ancora un poco sui valori reali $x_n = \sin n$ della successione in questione:

- ∀n>0 $x_n \neq 0$

  infatti se esistesse un valore naturale m tale che sin m=0 allora dovrebbe esistere un valore k naturale tale per cui m=kπ: ciò è impossibile in quanto π risulterebbe un numero razionale e 2000 anni di storia del pensiero matematico andrebbero in fumo!
- $x_n \neq 1$ ∀n

  ovviamente per lo stesso motivo del punto precedente
- Azzardo: $x_n \notin \mathbb{Q}$ ∀n>0

  pensando che sin 1 e cos1 non siano razionali (affermazione comunque da dimostrare) si può facilmente verificare che in forma matriciale

  $$\begin{bmatrix}\sin n \\ \cos n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin(n-1) \\ \cos(n-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1\end{bmatrix}^n \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

  in questo senso tutte le potenze di sin 1 e cos1 non daranno mai un numero razionale.
  Si accettano a riguardo pareri e opinioni.
- se n ≠m allora $x_n \neq x_m$

  Se infatti esistessero due numeri diversi m ed n tali che sin n = sin m allora esisterebbe almeno un relativo k tale per cui n=m+kπ e quindi ritornerebbero le considerazioni relative al punto 1