Metodi iterativi

per l’approssimazione delle radici dell’equazione $f(x)=0$

dicembre 2000
aprile 2007

Definizione

- Si chiama RADICE di una equazione

$$a(x)=b(x)$$

un numero (reale) u tale che

$$a(u)=b(u)$$

oppure tale che

$$a(u)-b(u)=0$$

Presentazione

- Non tutte le equazioni danno la possibilità di determinarne le radici con metodi analitici, ovvero con passaggi algebrici in grado di arrivare alla forma

  $$x = \ldots$$

  come ad esempio le equazioni

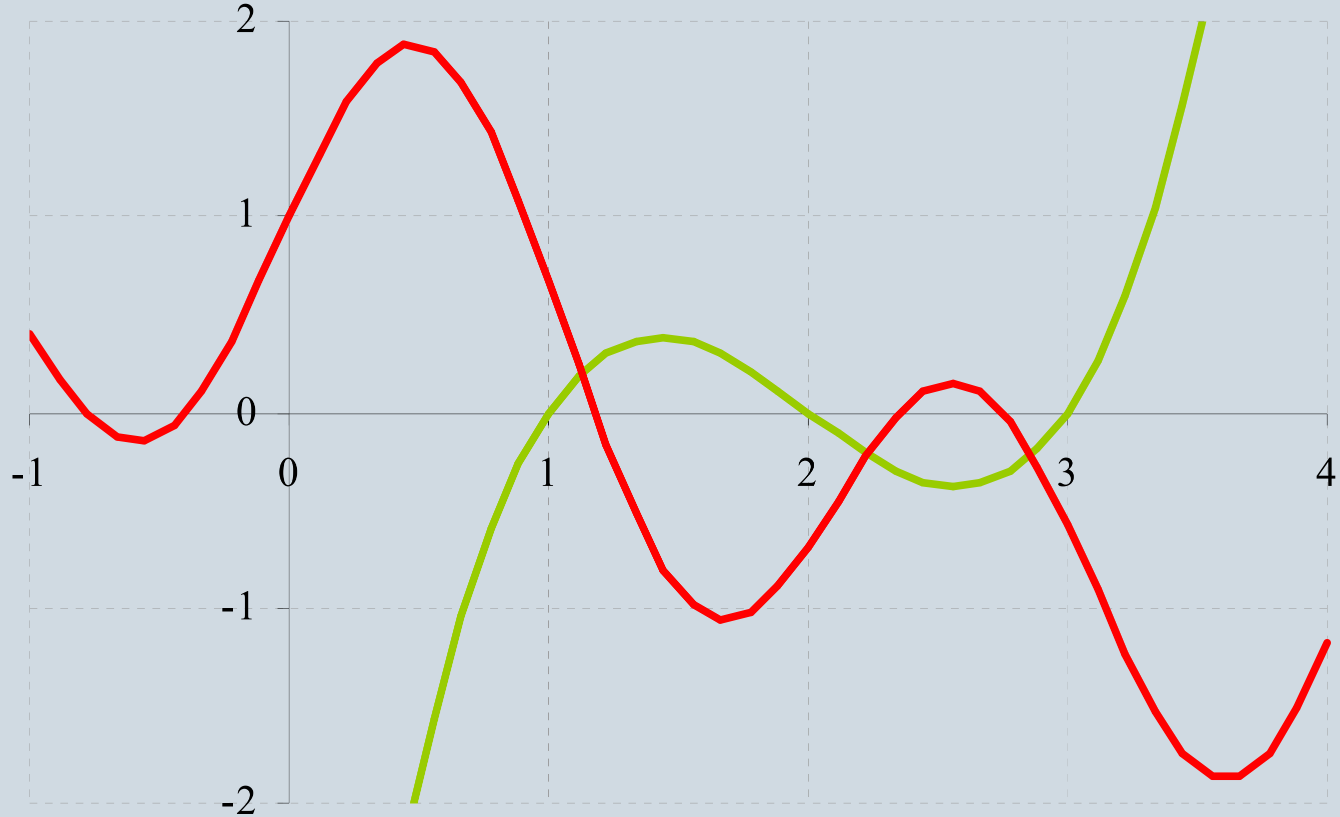
  $x=\cos(x)$, $\cos(x)=\ln(x)$, $2^x=2\cos(x)$ …

- Per essere certi dell’esistenza delle radici dell’equazione $a(x)=b(x)$ si ricorre al grafico nel piano cartesiano delle due curve

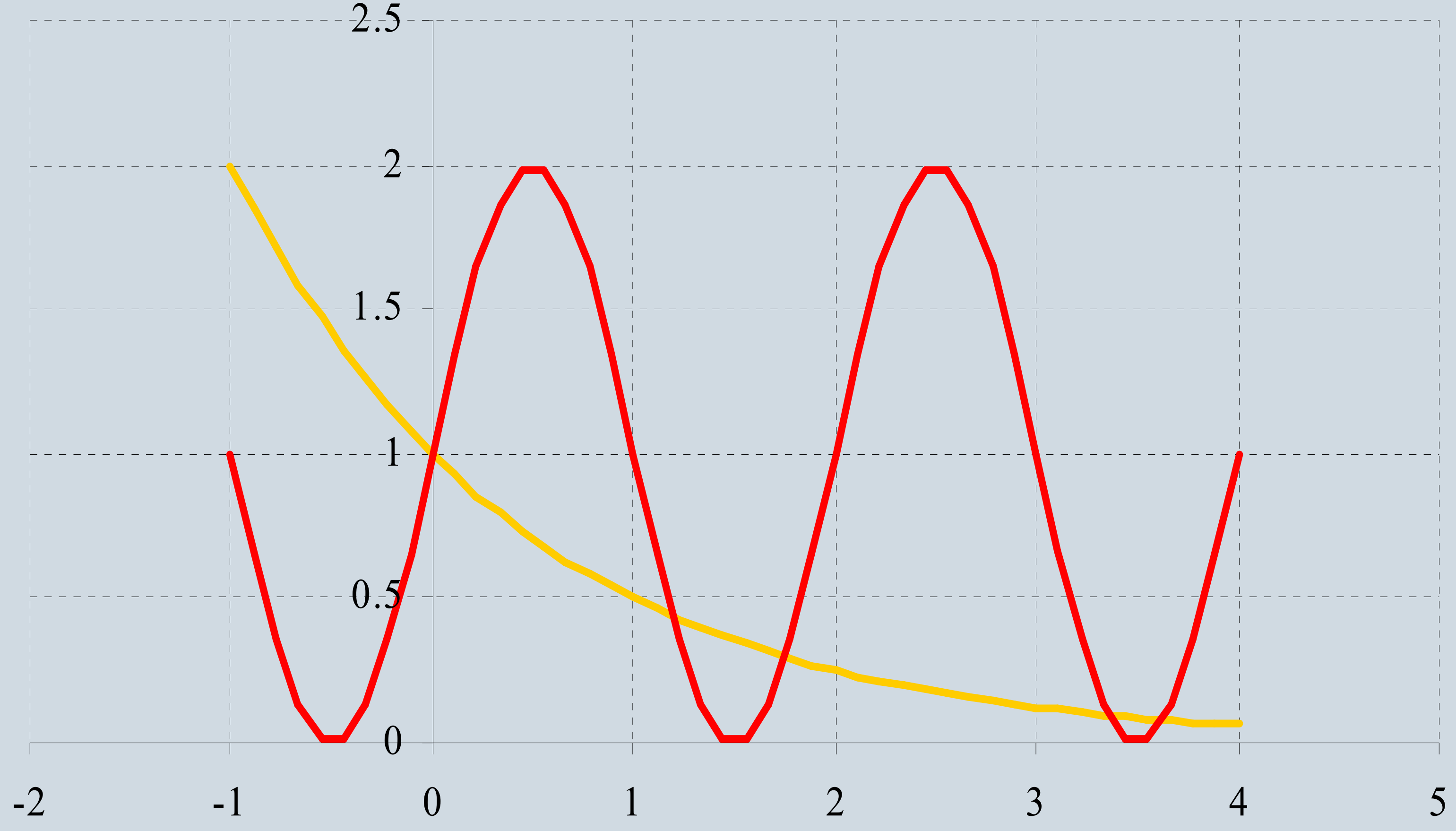
  $y=a(x)$ e di $y=b(x)$.

Se queste si intersecano allora l’ascissa del o dei punti di contatto sono le radici dell’equazione di partenza

$(x-2)(x-3)(x-1)=\cos(x)+\sin(3x)$



½^x=1+sin(π x)



- Nell’impossibilità di arrivare alla espressione analitica della radice u=… si costruisce una successione a_n tale che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = u$$

- Ci si “accontenta” pertanto di una stima di u a meno di una precisione prefissata che si indica con ε

Il metodo di bisezione

- L’equazione $a(x)=b(x)$ possiamo farla diventare della forma $f(x)=0$ ponendo $f(x):=a(x)-b(x)$
- determiniamo una successione c_n convergente alla radice in questo modo:
- partiamo da due estremi a e b rispettivamente a sinistra e a destra della radice tali che $f(a)f(b)<0$; si calcola il punto medio dei due estremi e si valuta in quale dei due intervalli la radice è rimasta

- Infatti se $f(a)f(c)<0$ allora la radice sarà compresa tra a e c, viceversa fra c e b
- Ripetiamo questo procedimento finché lo scarto fra a e b è minore di un certo errore prefissato ε
- L'ultimo dei valori rappresenta la stima della radice u (che rimane ancora analiticamente incognita)
- Si dimostra che il numero di iterazioni necessario per giungere alla approssimazione vale

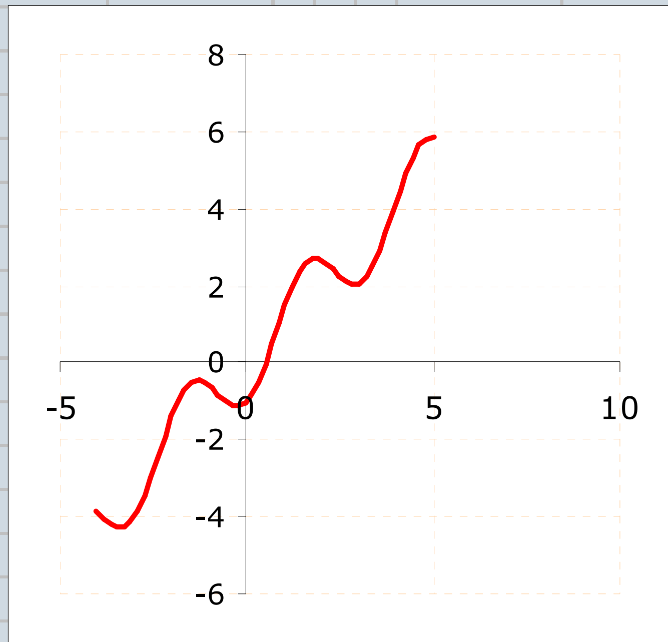
$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Esempio con il foglio elettronico

Metodo di bisezione

f(x)= **x-cos(2*x)**

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
0	**3**	1.5	-	+	+
0	1.5	0.75	-	+	+
0	0.75	0.375	-	+	-
0.375	0.75	0.5625	-	+	+
0.375	0.5625	0.46875	-	+	-
0.46875	0.5625	0.515625	-	+	+
0.46875	0.515625	0.492188	-	+	-
0.492188	0.515625	0.503906	-	+	-
0.503906	0.515625	0.509766	-	+	-
0.509766	0.515625	0.512695	-	+	-
0.512695	0.515625	0.51416	-	+	-
0.51416	0.515625	0.514893	-	+	-
0.514893	0.515625	0.515259	-	+	+
0.514893	0.515259	0.515076	-	+	+
0.514893	0.515076	0.514984	-	+	+
0.514893	0.514984	0.514938	-	+	+
0.514893	0.514938	0.514915	-	+	-
0.514915	0.514938	0.514927	-	+	-
0.514927	0.514938	0.514933	-	+	-
0.514933	0.514938	0.514935	-	+	+



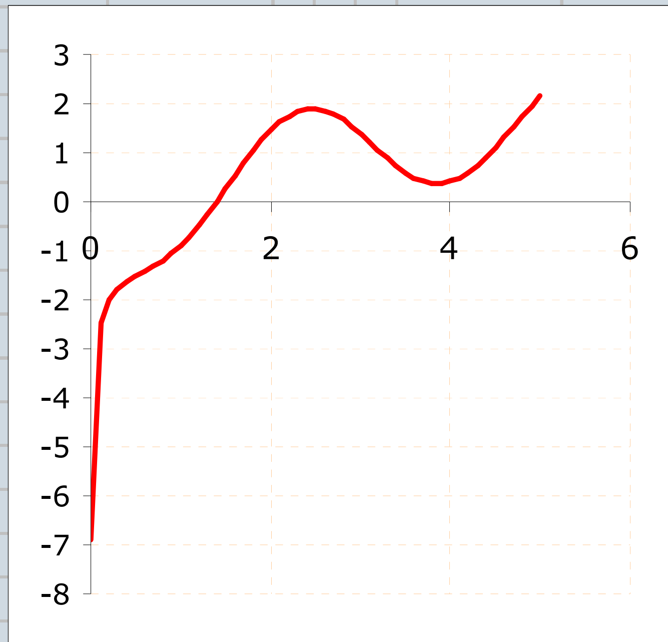
xmin	-4	xmax	5

Un altro esempio

Metodo di bisezione

f(x)= ln(x)-sin(2*x)

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
1	**2**	1.5	-	+	+
1	1.5	1.25	-	+	-
1.25	1.5	1.375	-	+	-
1.375	1.5	1.4375	-	+	+
1.375	1.4375	1.40625	-	+	+
1.375	1.40625	1.390625	-	+	-
1.390625	1.40625	1.398438	-	+	-
1.398438	1.40625	1.402344	-	+	+
1.398438	1.402344	1.400391	-	+	+
1.398438	1.400391	1.399414	-	+	-
1.399414	1.400391	1.399902	-	+	+
1.399414	1.399902	1.399658	-	+	+
1.399414	1.399658	1.399536	-	+	+
1.399414	1.399536	1.399475	-	+	+
1.399414	1.399475	1.399445	-	+	+
1.399414	1.399445	1.399429	-	+	+
1.399414	1.399429	1.399422	-	+	-
1.399422	1.399429	1.399426	-	+	-
1.399426	1.399429	1.399427	-	+	-
1.399427	1.399429	1.399428	-	+	-



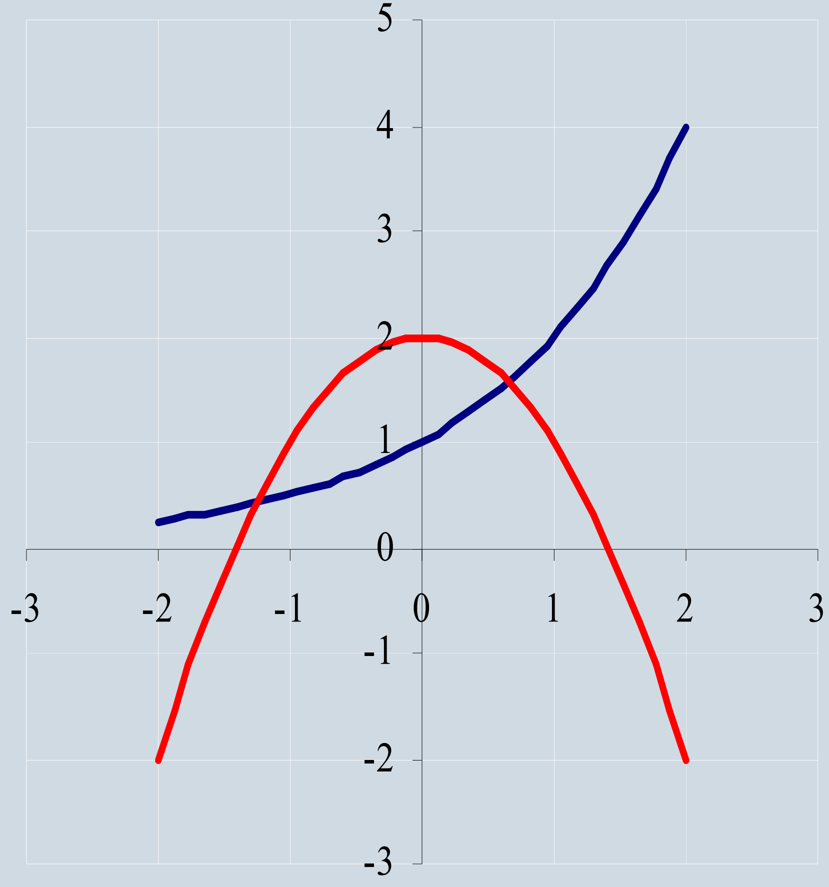
xmin	0.001	xmax	5

- *Function f(x)*
  f=………………
  End Function

-
```
Function Bisezione(a,b, optional prec=0.001)

Dim c,fc,fa,fb

if f(a)*f(b)>0 then
        Bisezione="Errore all'inizio"
        Exit Function
end if
Do
        c=0.5*(a+b)
        if f(a)*f(c)<0 then
                b=c
        else
                a=c
        end if
Loop until Abs(b-a)<prec
Bisezione=c

End Function
```

codice Visual Basic

Si approssimino le radici dell’equazione 2^x=2-x^2



Dal grafico si evince che una radice si troverà nell’intervallo (-2;-1)

Infatti

Bisezione(-2,-1)=-1.2568359375

Bisezione(-1.26,-1,25,.0000001)=
-1.2576912689209

Allo stesso modo

Bisezione(0,1) = 0.6533203125

Il metodo del punto unito

Risolve l'equazione

$$x=g(x)$$

Caratteristiche

- Il MB ha il pregio di essere chiaro e una volta impostato converge alla radice. Tuttavia
  - È piuttosto lento
  - Necessita di due semi iniziali a e b tali che $f(a)f(b)<0$
  - Ad ogni iterazione è necessario il controllo $f(a)f(c)<0$ …

caratteristiche

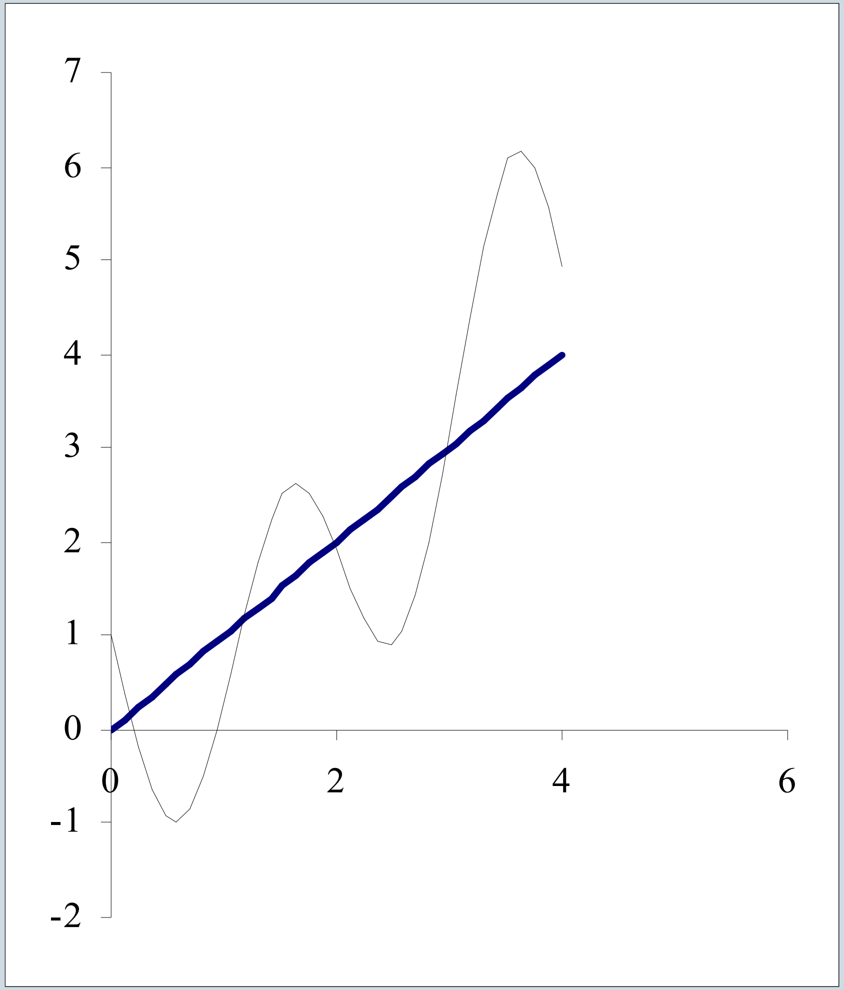
- Il metodo del punto unito (MPU) è invece facilmente implementabile e necessita di un solo seme iniziale.

  Infatti, data l’equazione nella forma $x=g(x)$ dove g è una funzione reale, la successione si costruisce con

$$\begin{cases} x_0 \; dato \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad n > 0 \end{cases}$$

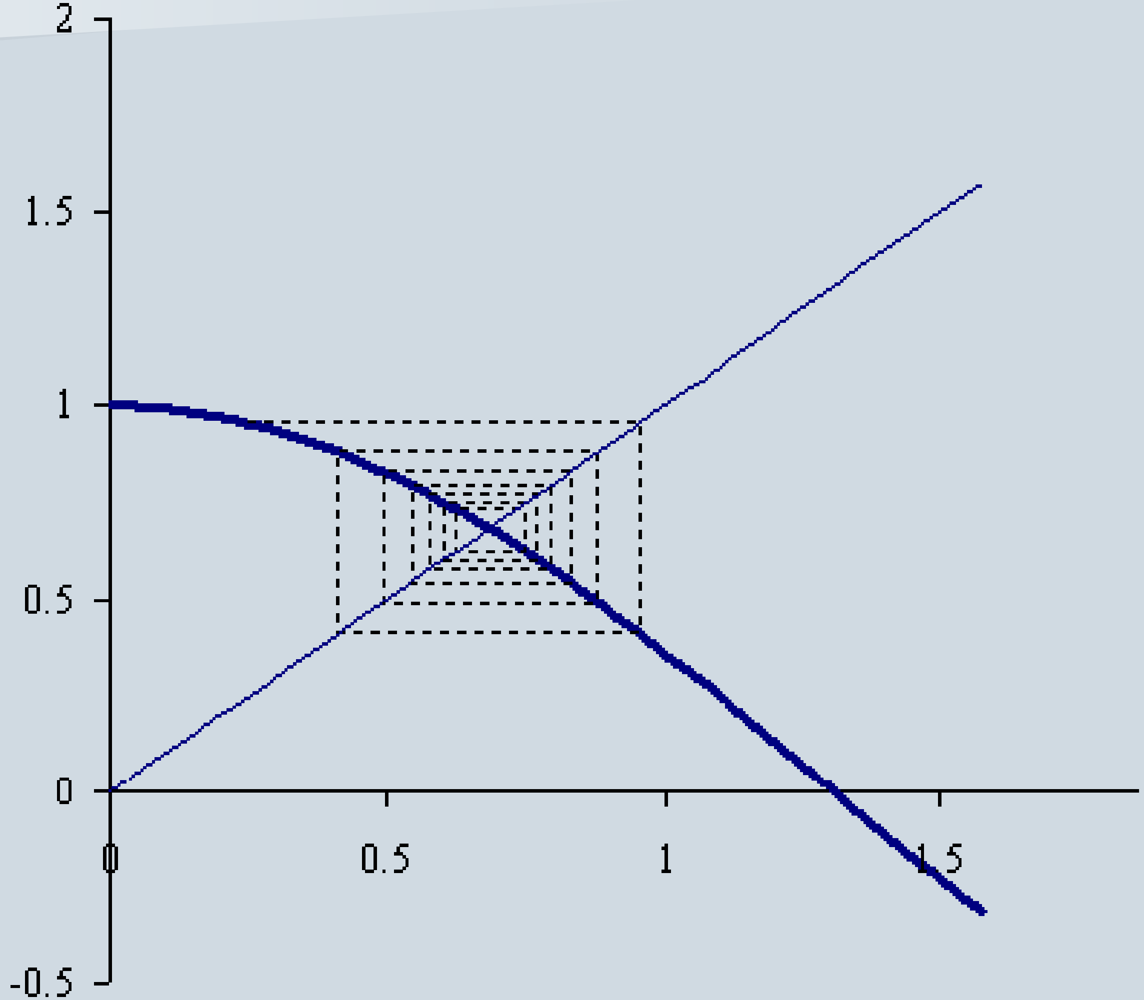
Caratteristiche

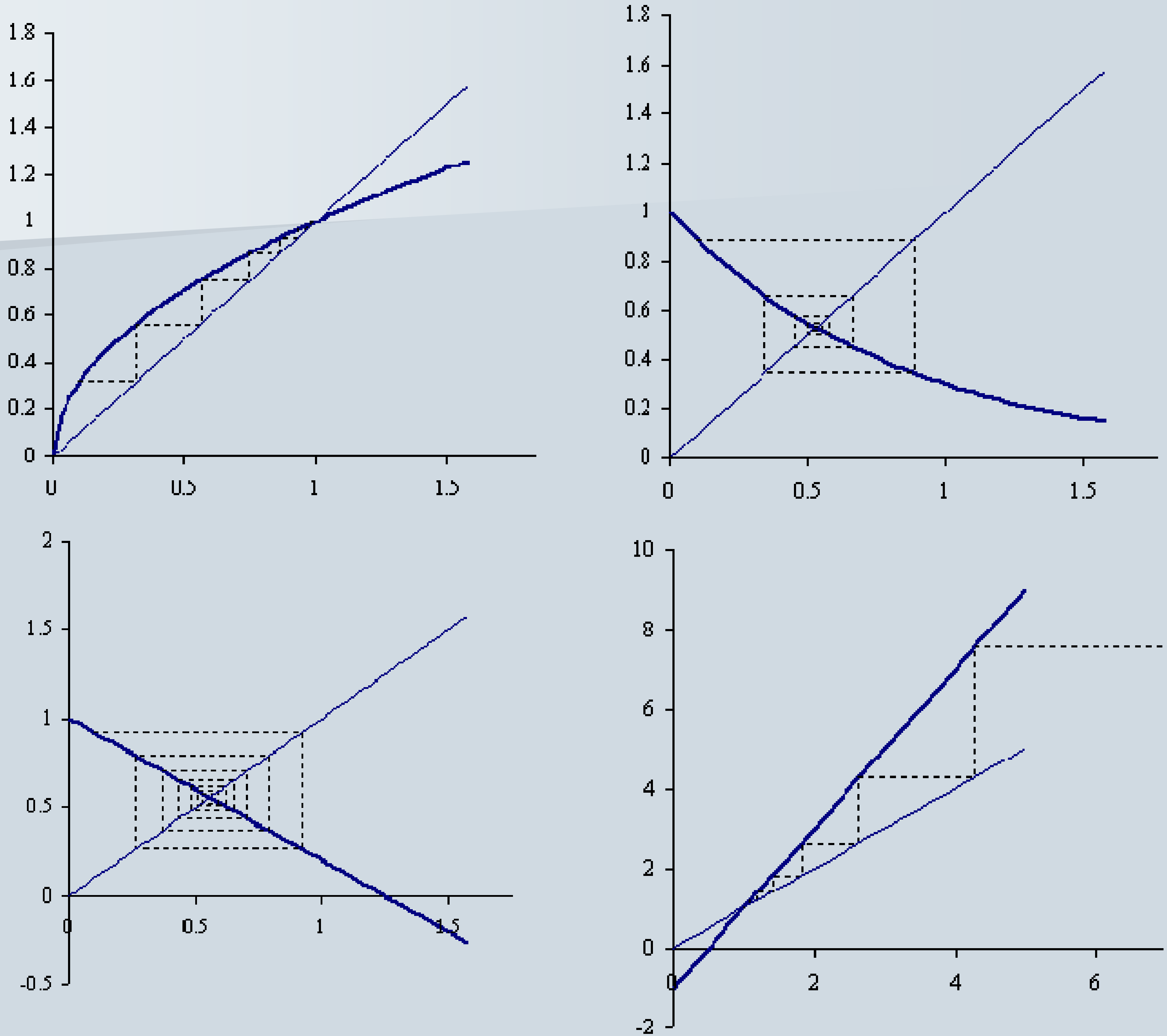
- L'interpretazione grafica è semplice: consiste nel determinare le ascisse dei punti di intersezione della bisettrice **y=x** con il grafico della curva **y=g(x)**



- La successione del MPU consiste nell'andare dalla curva alla retta bisettrice nel modo illustrato nella figura:

	x_n
x_0	0.25
x_1	0.955336
x_2	0.411767
x_3	0.880386
x_4	0.491954
x_5	0.830749
x_6	0.54291
x_7	0.79518
x_8	0.578248
x_9	0.768759
x_{10}	0.603821
x_{11}	0.748775
x_{12}	0.622761
x_{13}	0.733518
x_{14}	0.636981
x_{15}	0.721814
x_{16}	0.647744
x_{17}	0.712815





1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
-0.5
10
8
6
4
2
-2

Si può vedere che il MPU pur essendo facilmente implementabile presenta alcuni limiti, alcuni sostanziali

- Può, a volte, essere più lento del MB
- Non permette di prevedere il numero massimo di iterazioni necessarie per giungere alla stima di u a meno di ε
- **La convergenza non è garantita per tutte le radici dell'equazione** (alcune si e altre no)

Implementazione in VBA

```
Function g(x)

        g=.....

End Function


Function Unito(x, Optional eps=0.001)

Dim u, u0, n, scarto

        u0=x
        n=0
        Do
                u=g(u0)
                Scarto=Abs(u-u0)
                n=n+1
                u0=u

        Loop Until Scarto<eps or n>1000 or u=0

        Unito=Iif(n<1000,u,"non lo so")

End Function
```

Applicando il metodo del PU all'equazione $x=x/1.1$ che ha per radice $u=0$ ci si accorge che può essere molto lento:

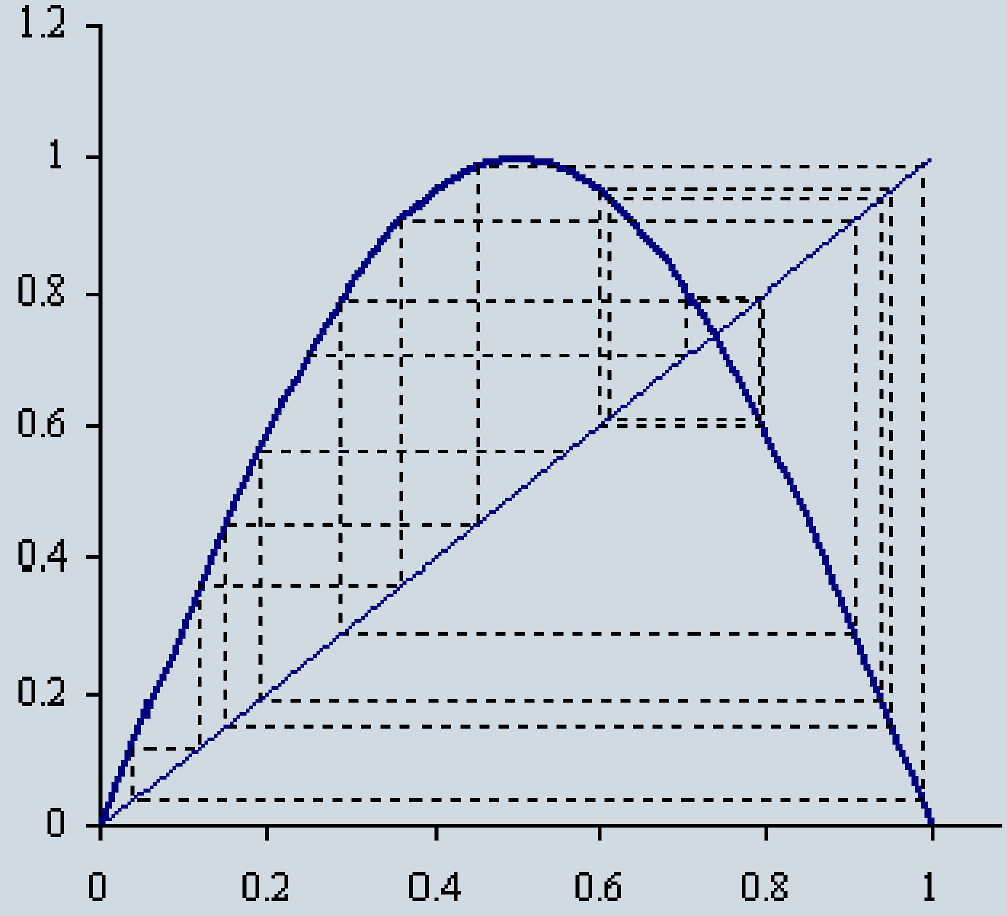
n	x
0	1
1	0.909090909
2	0.826446281
3	0.751314801
4	0.683013455
5	0.620921323
6	0.56447393
7	0.513158118
8	0.46650738
9	0.424097618
10	0.385543289
11	0.350493899
12	0.318630818
13	0.28966438
14	0.263331254
15	0.239392049
16	0.217629136
17	0.197844669
18	0.17985879
19	0.163507991
20	0.148643628
21	0.135130571

100	0.0000725657159015
101	0.0000659688326377
102	0.0000599716660343
103	0.0000545196963948
104	0.0000495633603589
105	0.0000450576003263
106	0.0000409614548421
107	0.0000372376862201
108	0.0000338524420182
109	0.0000307749472893
110	0.0000279772248085
111	0.0000254338407350
112	0.0000231216733954
113	0.0000210197030868
114	0.0000191088209880
115	0.0000173716554436
116	0.0000157924140396
117	0.0000143567400360
118	0.0000130515818509
119	0.0000118650744099
120	0.0000107864312818

Dopo 100 iterazioni si ha ancora uno scarto di 0.00001

Il MPU può generare successioni del tutto casuali che non convergono e non divergono:

Ad esempio $x=\sin(\pi x)$



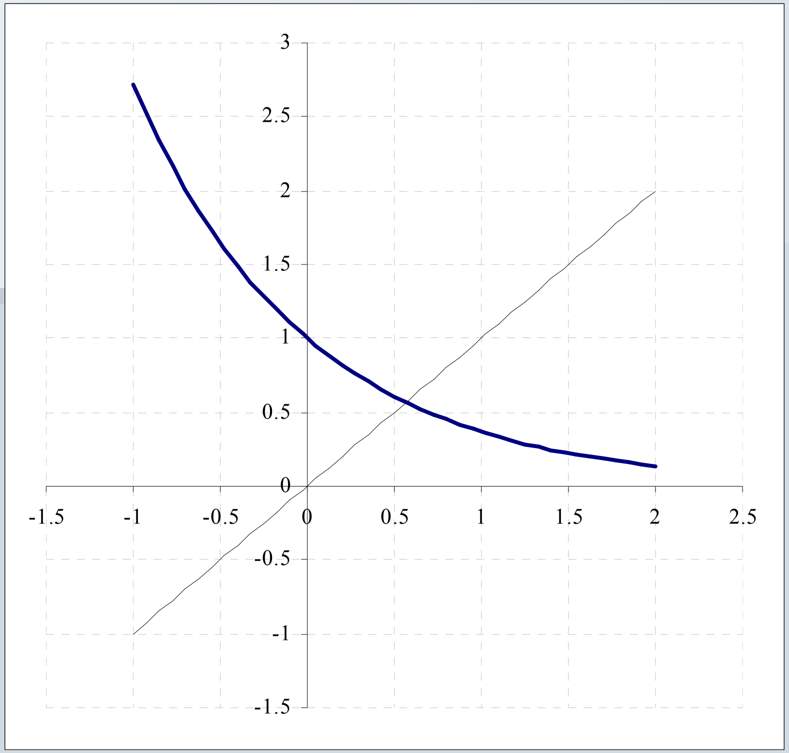
Condizione NS per la convergenza del PU

- Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione del metodo iterativo

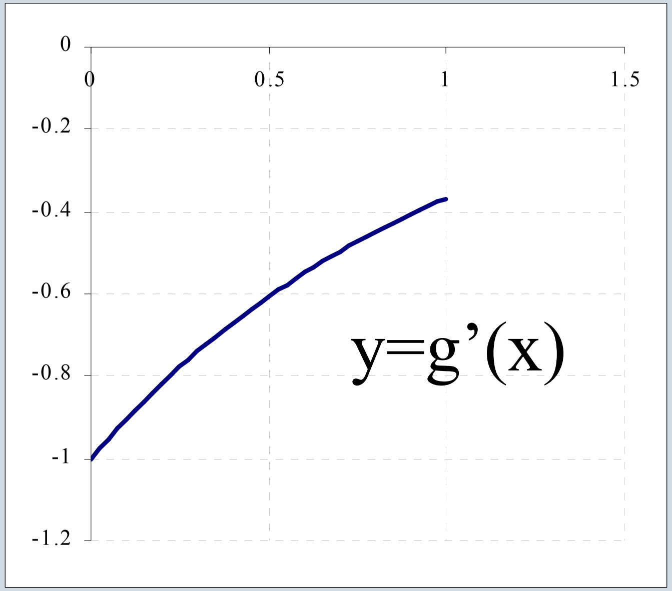
$$\begin{cases} x_0 \; dato \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 0 \end{cases}$$

converga alla radice incognita u è che $|g'(u)|<1$

- Naturalmente non conoscendo il valore esatto di u è impossibile determinare a priori dal punto di vista analitico la convergenza. Tuttavia è possibile valutare qualitativamente il campo di variabilità di $|g'(x)|$ e stabilire pertanto se l'intervallo è ragionevolmente accettabile per la convergenza.
- Vediamo un esempio:



- L'equazione $x=\exp(-x)$ ha una sola soluzione compresa fra 0 e 1: la derivata $g'(x)=-\exp(-x)$ in tale intervallo varia da –1 a circa –0.4



- Il valore di $|g'(u)|$ pertanto è <1

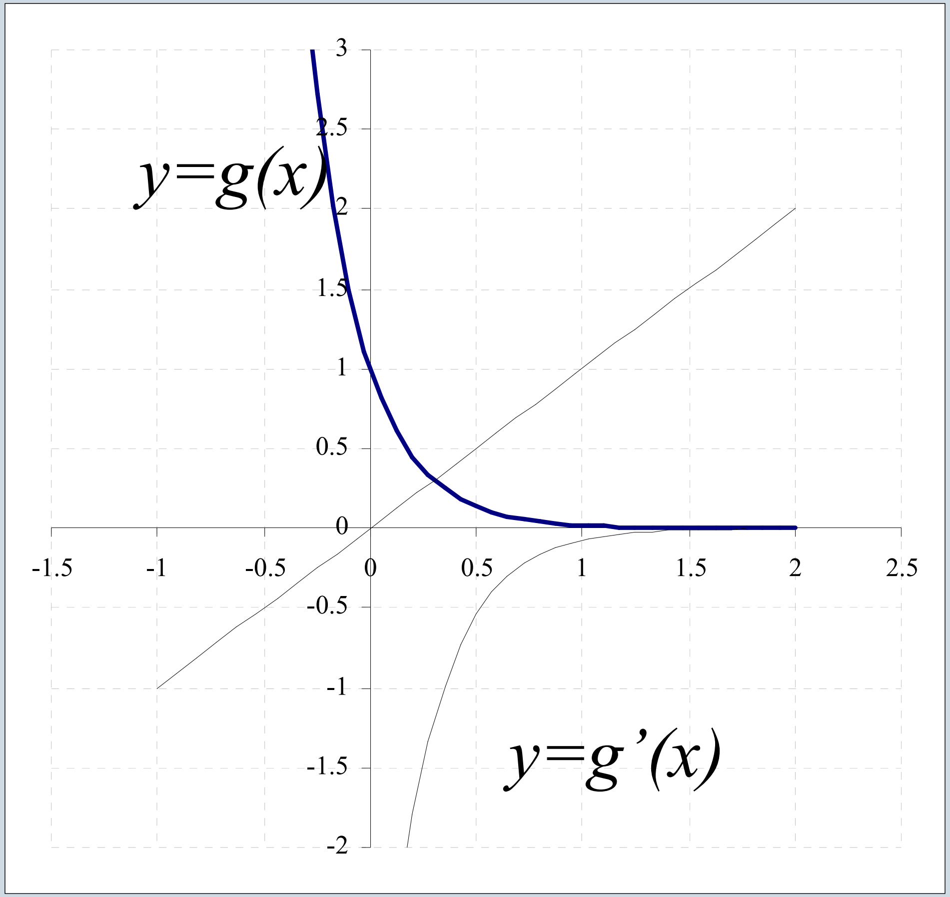
Vediamo i calcoli del metodo:

x 0	0.2
x 1	0.818730753
x 2	0.440991026
x 3	0.64339848
x 4	0.525503473
x 5	0.591257607
x 6	0.553630597
x 7	0.574858936
x 8	0.562784252
x 9	0.569620886
x 10	0.565739878
x 11	0.567939785
x 12	0.566691744
x 13	0.56739944
x 14	0.566998036
x 15	0.567225677
x 16	0.567096567
x 17	0.56716979
x 18	0.567128262
x 19	0.567151814
x 20	0.567138456
x 21	0.567146032

x 0	0.5
x 1	0.60653066
x 2	0.545239212
x 3	0.579703095
x 4	0.560064628
x 5	0.571172149
x 6	0.564862947
x 7	0.568438048
x 8	0.566409453
x 9	0.567559634
x 10	0.566907213
x 11	0.567277196
x 12	0.567067352
x 13	0.56718636
x 14	0.567118864
x 15	0.567157144
x 16	0.567135434
x 17	0.567147746
x 18	0.567140763
x 19	0.567144724
x 20	0.567142478
x 21	0.567143751

x 0	0.7
x 1	0.496585304
x 2	0.608605318
x 3	0.5441092
x 4	0.580358537
x 5	0.559697658
x 6	0.57138179
x 7	0.564744541
x 8	0.568505358
x 9	0.566371329
x 10	0.567581272
x 11	0.566894946
x 12	0.567284155
x 13	0.567063406
x 14	0.567188598
x 15	0.567117595
x 16	0.567157864
x 17	0.567135025
x 18	0.567147978
x 19	0.567140632
x 20	0.567144798
x 21	0.567142435

- Vediamo un contro esempio: l'equazione $x=\exp(-4x)$. Dal grafico della $g'(x)$ possiamo estrapolare che nella radice la CNS non è verificata



Il metodo di Newton Rapson

Per approssimare le radici di

$f(x)=0$

- L’idea è di creare una successione che converga alla radice nel seguente modo:
  - Si parte da un seme x_0
  - Si costruisce la retta tangente alla curva $y=f(x)$ passante per $(x_0, f(x_0))$
  - Si interseca tale retta con l’asse delle ascisse di eq.ne $y=0$
  - L’ascissa di tale punto è il termine x_1
  - Si itera il procedimento per x_2, x_3 e successivi

- L’implementazione necessita della conoscenza dell’espressione della derivata prima della f, necessaria per il calcolo della tangente. Infatti l’equazione della retta tangente vale

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

- Mettendo a sistema tale eq.ne con l’asse delle ascisse si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \\ y = 0 \end{cases}$$

- Il punto soluzione del sistema vale

$$\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ; 0 \right)$$

- Consideriamo pertanto

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

il metodo iterativo generante la successione

Esempio #1 $x^2=0$

La radice, peraltro banale, $x=0$ può essere approssimata nel seguente modo

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2}{2x} = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$$

Esempio #2 $\qquad x^2=a$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$$x_{n+1} = 0.5(x_n + a / x_n)$$

Tale iterazione converge alla radice quadrata di a. È un ottimo metodo per il calcolo della radice stessa

$f(x)=$ x^2-2

○ Approssimata
◉ Esatta $f'(x)=$ 2*x

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
4	14	8
2.25	3.0625	4.5
1.569444	0.46316	3.1388889
1.42189	0.02177	2.8437807
1.414234	5.9E-05	2.8284686
1.414214	4.3E-10	2.8284271
1.414214	1.4E-14	2.8284271
1.414214	-1E-14	2.8284271
1.414214	1.4E-14	2.8284271
1.414214	-1E-14	2.8284271
1.414214	1.4E-14	2.8284271
1.414214	-1E-14	2.8284271

iter 3

$xmin$ -1
$xmax$ 4

$f(x)=$ x^2-2

○ Approssimata
◉ Esatta $f'(x)=$ 2*x

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
-2	2	-4
-1.5	0.25	-3
-1.41667	0.00694	-2.833333
-1.41422	6E-06	-2.828431
-1.41421	4.5E-12	-2.828427
-1.41421	-1E-14	-2.828427
-1.41421	1.4E-14	-2.828427
-1.41421	-1E-14	-2.828427
-1.41421	1.4E-14	-2.828427
-1.41421	-1E-14	-2.828427
-1.41421	1.4E-14	-2.828427
-1.41421	-1E-14	-2.828427

iter 3

$xmin$ -3
$xmax$ 0

- Non sempre è conveniente calcolare la derivata prima.
  In tal senso la si può approssimare con il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dove h è “ragionevolmente” scelto “piccolo”

Esempio #3

$$\sqrt{|x-1|} - 2 = 0$$

- Tale funzione non è derivabile per x=1
- Il calcolo della derivata implica l’introduzione della funzione sign(x)
- Il calcolo della derivata è “pesante”
- Scegliamo h=0.01 e vediamo cosa succede

$f(x)=$ abs(x-1)^.5-2

$$\sqrt{|x-1|}-2=0$$

◉ Approssimata $dx=$ 0.01

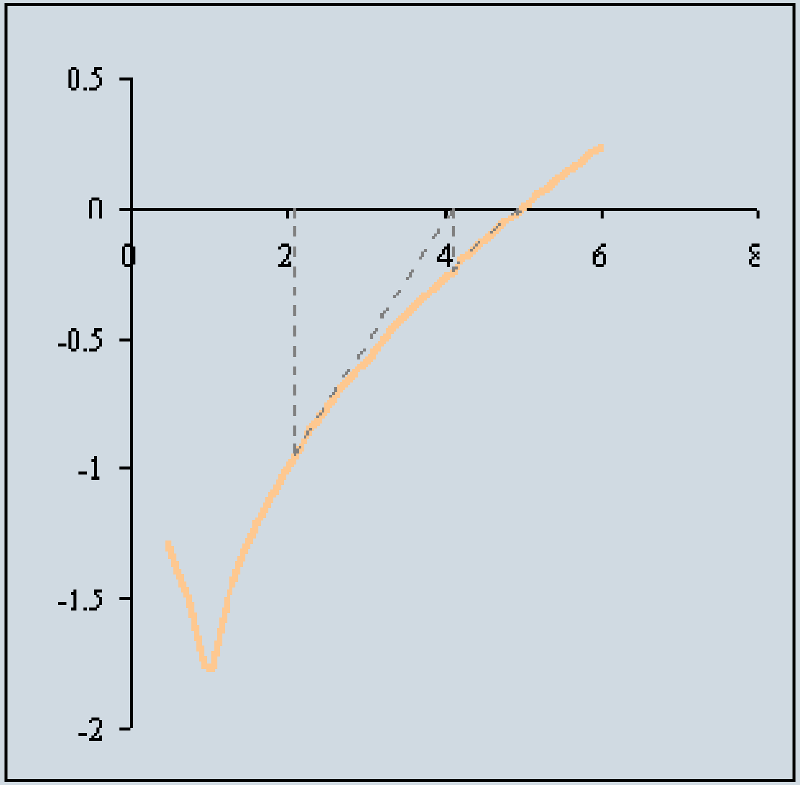
○ Esatta

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
2.1	-0.9512	0.4756527
4.09976	-0.2394	0.2837632
4.943373	-0.0142	0.2516292
4.999834	-4E-05	0.2498491
5	2.6E-08	0.2498439
5	-2E-11	0.2498439
5	9.8E-15	0.2498439
5	0	0.2498439
5	0	0.2498439
5	0	0.2498439
5	0	0.2498439
5	0	0.2498439

iter 3

$xmin$ 0.5

$xmax$ 6



$f(x)=$ abs(x-1)^.5-2

(•) Approssimata $dx=$ 0.01

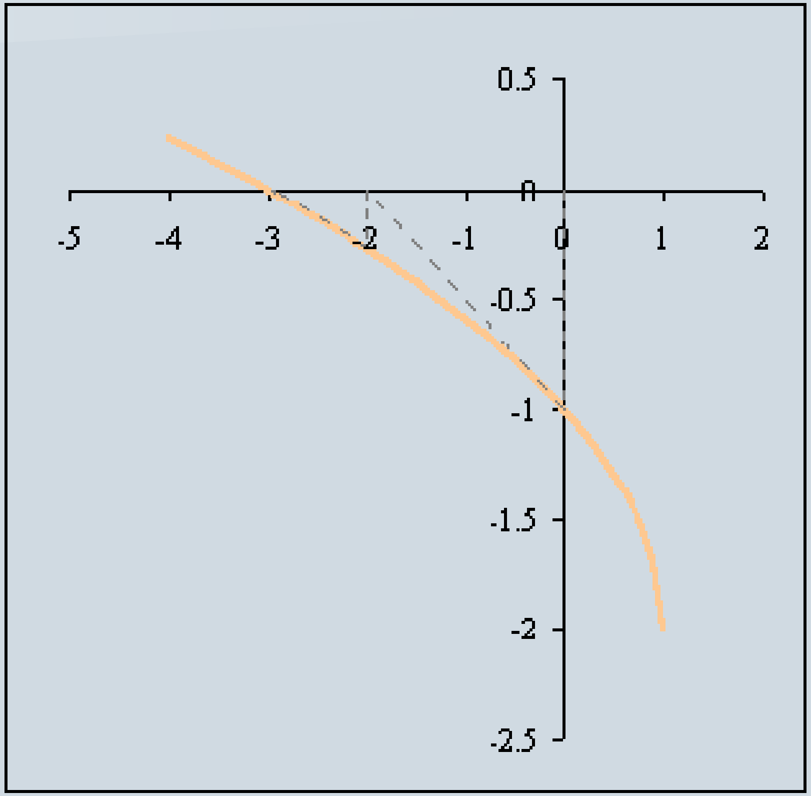
( ) Esatta

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	-1	-0.501256
-1.99499	-0.2694	-0.289158
-2.92665	-0.0134	-0.252485
-2.99961	-1E-04	-0.250169
-3	-6E-08	-0.250156
-3	-4E-11	-0.250156
-3	-2E-14	-0.250156
-3	0	-0.250156
-3	0	-0.250156
-3	0	-0.250156
-3	0	-0.250156
-3	0	-0.250156

iter 3

$xmin$ -4

$xmax$ 1



Partendo da $x_0=0$ si ottiene una successione convergente all'altra radice $x=-3$

Se h è un poco “grossolano”?

$f(x)=$ sin(x)

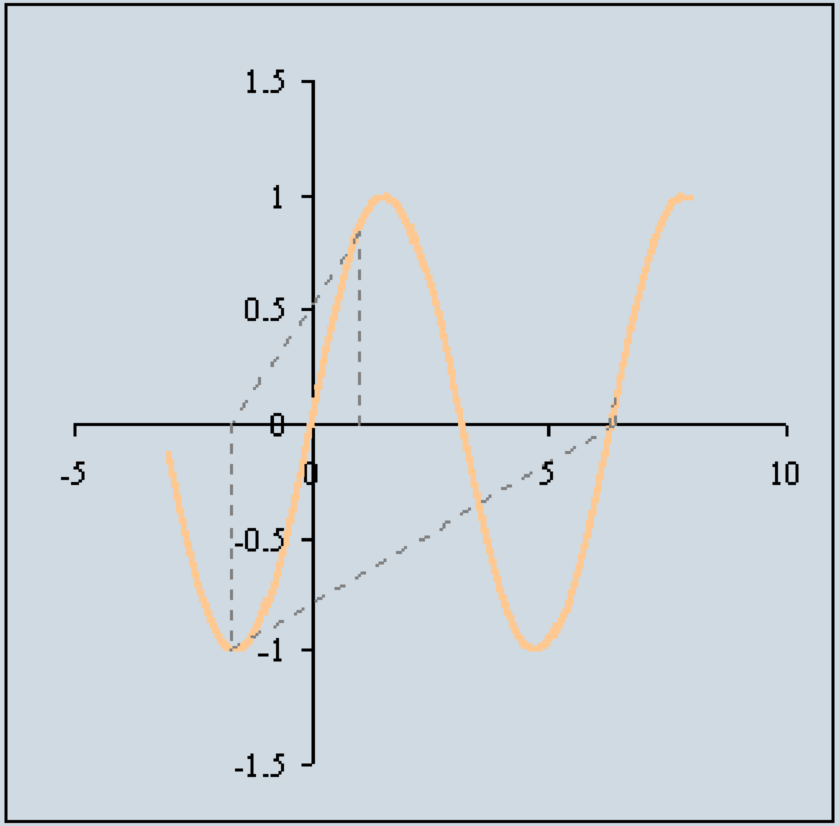
◉ Approssimata $dx=$ 0.5

○ Esatta

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	0.84147	0.312048
-1.69661	-0.9921	0.1225836
6.396616	0.11319	0.9249769
6.274248	-0.0089	0.9610009
6.283548	0.00036	0.9587622
6.28317	-2E-05	0.9588549
6.283186	6.7E-07	0.9588509
6.283185	-3E-08	0.9588511
6.283185	1.2E-09	0.9588511
6.283185	-5E-11	0.9588511
6.283185	2.3E-12	0.9588511
6.283185	-1E-13	0.9588511

$xmin$ -3

$xmax$ 8



... e per finire ...

Seguendo il link

http://www.francococca.com/estrai_articolo.asp?id=117

si possono scaricare i fogli relativi ai metodi visti e provare per conto proprio.

That's all folks!