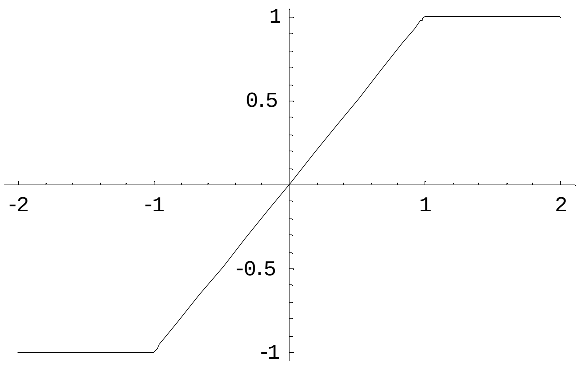
Determina lo sviluppo di Fourier della funzione

$$\{-1, x, 1\}$$

negli intervalli

$$\{-2, -1, 1, 2\}$$



- -

La componente continua a_0 si calcola con

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \mathrm{dx} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{dx}\ x$$

$$\left\{-\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}, \frac{x}{2}\right\} \longrightarrow \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

e pertanto $a_0 = 0$

La funzione risulta essere dispari e pertanto $a_k=0$

I coefficienti dei seni si ottengono da

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{dx}\ \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \mathrm{dx}\ \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{dx}\ x \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)$$

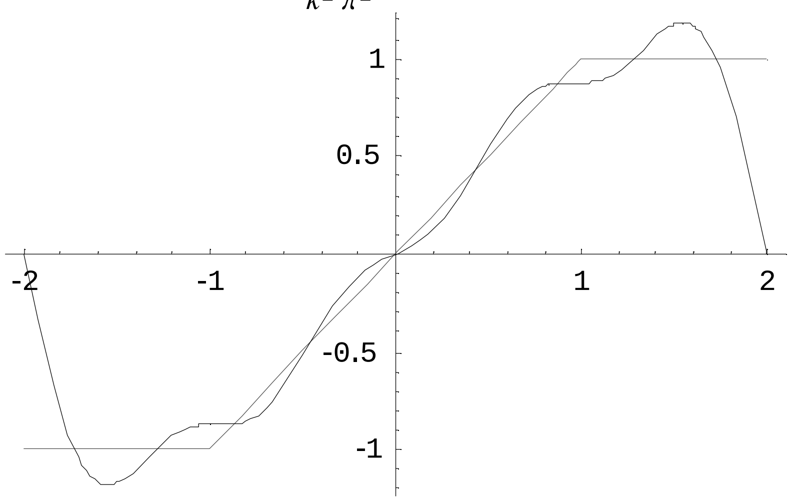
le cui primitive sono

$$\left\{\frac{\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k\,\pi}, \frac{1}{2}\left(\frac{4\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k^2\,\pi^2} - \frac{2\,x\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k\,\pi}\right), -\frac{\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k\,\pi}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli diventano

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\,\pi} - \frac{2\,(-1)^k}{k\,\pi}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{8\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\,\pi^2} - \frac{4\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\,\pi}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\,\pi} - \frac{2\,(-1)^k}{k\,\pi}\right)\right\}$$

Pertanto $b_k = -\dfrac{2\left((-1)^k\,k\,\pi - 2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)}{k^2\,\pi^2}$

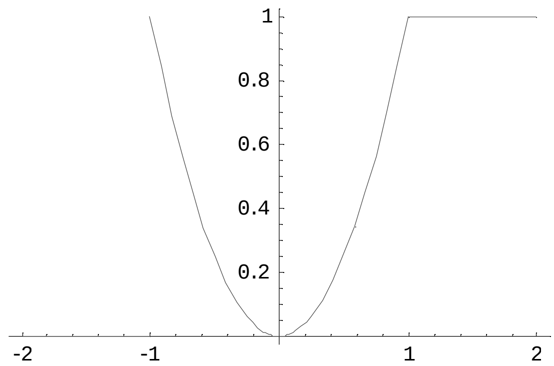


Determina lo sviluppo di Fourier della funzione

$\{0, x^2, 1\}$

negli intervalli

$\{-2, -1, 1, 2\}$



La componente continua a_0 si calcola con

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\ x^2 + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} dx$$

$$\left\{0, \frac{x^3}{6}, \frac{x}{2}\right\}$$

$$\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$$

e pertanto $a_0 = \frac{5}{6}$

I coefficienti pari dei coseni si ottengono con

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\ \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) x^2 + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} dx\ \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

le cui primitive valgono

$$\left\{0, \frac{1}{2}\left(\frac{8x\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k^2\pi^2} + \frac{2(k^2\pi^2x^2-8)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k^3\pi^3}\right), \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k\pi}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli valgono

$$\left\{0, \frac{1}{2}\left(\frac{16\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2} + \frac{4(k^2\pi^2-8)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^3\pi^3}\right), -\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}\right\}$$

Pertanto $a_k = \dfrac{\pi^2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)k^2 + 8\pi\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)k - 16\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^3\pi^3}$

I coefficienti dei seni si ottengono da

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\ \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) x^2 + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} dx\ \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

le cui primitive sono

$$\left\{0, \frac{1}{2}\left(\frac{8x\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k^2\pi^2} - \frac{2(k^2\pi^2x^2-8)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k^3\pi^3}\right), -\frac{\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k\pi}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli diventano

$$\left\{0, 0, \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} - \frac{2(-1)^k}{k\pi}\right)\right\}$$

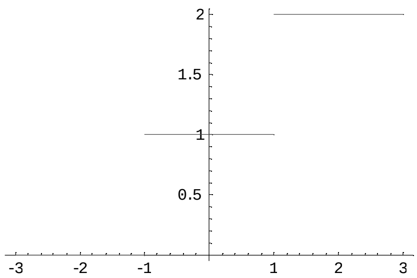
Pertanto $b_k = -\dfrac{(-1)^k - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$

Determina lo sviluppo di Fourier della funzione

$$\{0,\ 1,\ 2\}$$

negli intervalli

$$\{-3,\ -1,\ 1,\ 3\}$$



La componente continua a_0 si calcola con

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx \ + 2\ \frac{1}{3}\int_{1}^{3} dx$$

$$\left\{0,\ \frac{x}{3},\ \frac{2\,x}{3}\right\}$$

$$\left\{0,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right\}$$

e pertanto a_0= 2

I coefficienti pari dei coseni si ottengono con

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx\ \cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right) + 2\ \frac{1}{3}\int_{1}^{3} dx\ \cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right)$$

le cui primitive valgono

$$\left\{0,\ \frac{\sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right)}{k\,\pi},\ \frac{2\sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right)}{k\,\pi}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli valgono

$$\left\{0,\ \frac{2\sin\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)}{k\,\pi},\ -\frac{2\sin\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)}{k\,\pi}\right\}$$

Pertanto a_k=0

I coefficienti dei seni si ottengono da

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx\ \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right) + 2\ \frac{1}{3}\int_{1}^{3} dx\ \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right)$$

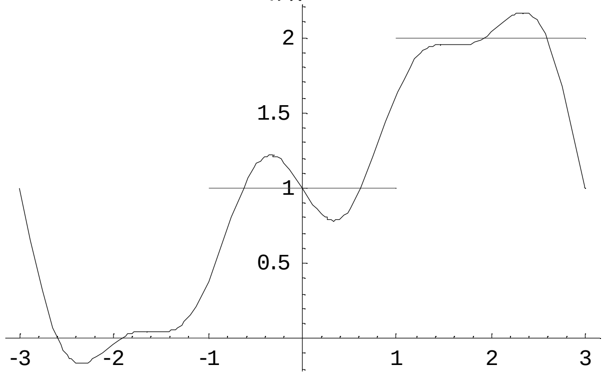
le cui primitive sono

$$\left\{0,\ -\frac{\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right)}{k\,\pi},\ -\frac{2\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{3}\right)}{k\,\pi}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli diventano

$$\left\{0,\ 0,\ \frac{2}{3}\left(\frac{3\cos\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)}{k\,\pi} - \frac{3\,(-1)^k}{k\,\pi}\right)\right\}$$

Pertanto b_k=$-\dfrac{2\left((-1)^k - \cos\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)\right)}{k\,\pi}$

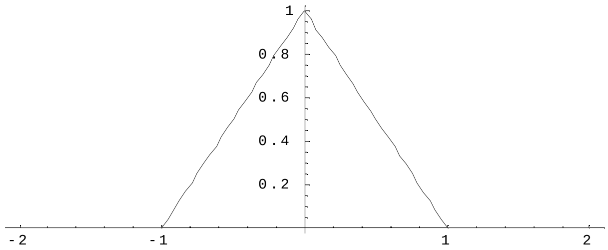


Determina lo sviluppo di Fourier della funzione

$$\{0,\ x+1,\ 1-x,\ 0\}$$

negli intervalli

$$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$$



La componente continua a_0 si calcola con

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{dx}\ \ (1-x) + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \mathrm{dx}\ \ (x+1)$$

$$\left\{0,\ \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right),\ \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right),\ 0\right\}$$

$$\left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ 0\right\}$$

e pertanto $a_0 = \frac{1}{2}$

I coefficienti pari dei coseni si ottengono con

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{dx}\ \ (1-x)\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \mathrm{dx}\ \ (x+1)\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)$$

le cui primitive valgono

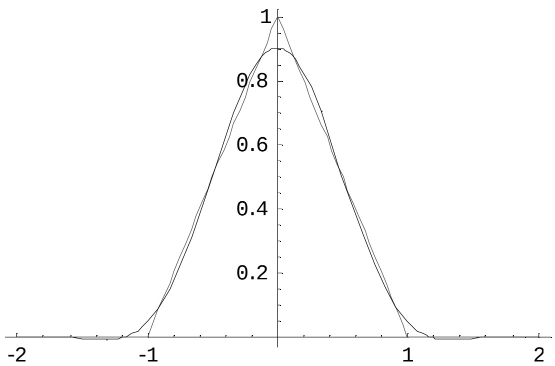
$$\left\{0,\ \frac{1}{2}\left(\frac{4\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k^2\pi^2}+\frac{2\,(x+1)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k\,\pi}\right),\ \frac{1}{2}\left(-\frac{4\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k^2\pi^2}-\frac{2\,(x-1)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{k\,\pi}\right),\ 0\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli valgono

$$\left\{0,\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{k^2\pi^2}-\frac{4\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{k^2\pi^2}-\frac{4\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}\right),\ 0\right\}$$

Pertanto $a_k = -\frac{4\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)-1\right)}{k^2\,\pi^2}$

La funzione è pari e pertanto $b_k=0$

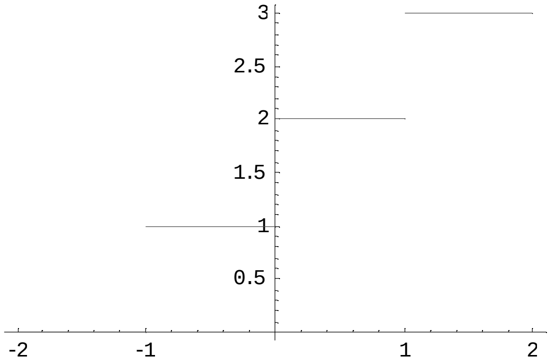


Determina lo sviluppo di Fourier della funzione

$\{0, 1, 2, 3\}$

negli intervalli

$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$



- -

La componente continua a_0 si calcola con

$$2\,\frac{1}{2}\int_0^1 dx \;+\frac{1}{2}\int_{-1}^0 dx \;+3\,\frac{1}{2}\int_1^2 dx$$

$$\left\{0,\ \frac{x}{2},\ x,\ \frac{3\,x}{2}\right\}$$

$$\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right\}$$

e pertanto a_0= 3

Traslando l'asse delle ascisse verso l'alto di 3/2 la funzione diventerebbe dispari e allora tutti i coefficienti dei coseni diventano nulli.

I coefficienti dei seni si ottengono da

$$2\,\frac{1}{2}\int_0^1 dx\ \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_{-1}^0 dx\ \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)+3\,\frac{1}{2}\int_1^2 dx\ \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)$$

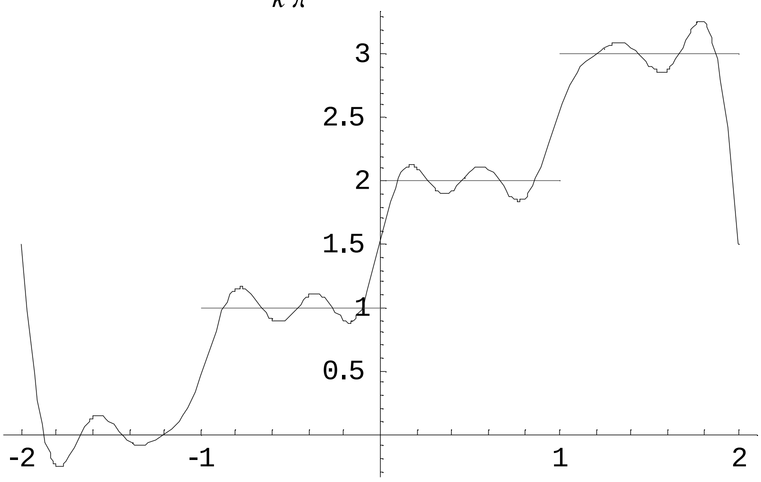
le cui primitive sono

$$\left\{0,\ -\frac{\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)}{k\,\pi},\ -\frac{2\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)}{k\,\pi},\ -\frac{3\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right)}{k\,\pi}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli diventano

$$\left\{0,\ \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)}{k\,\pi}-\frac{2}{k\,\pi}\right),\ \frac{2}{k\,\pi}-\frac{2\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)}{k\,\pi},\ \frac{3}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)}{k\,\pi}-\frac{2\,(-1)^k}{k\,\pi}\right)\right\}$$

Pertanto b_k= $\dfrac{2\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)-3\,(-1)^k+1}{k\,\pi}$

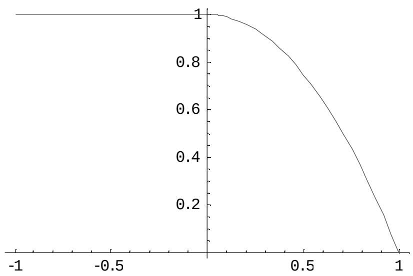


Determina lo sviluppo di Fourier della funzione

$$\{1,\ 1-x^2\}$$

negli intervalli

$$\{-1,\ 0,\ 1\}$$



- -

La componente continua a_0 si calcola con

$$\frac{1}{1}\int_{-1}^{0} dx \ + \frac{1}{1}\int_{0}^{1} dx\ \left(1-x^2\right)$$

$$\left\{x, x-\frac{x^3}{3}\right\}$$

$$\left\{1, \frac{2}{3}\right\}$$

e pertanto $a_0 = \frac{5}{3}$

I coefficienti pari dei coseni si ottengono con

$$\frac{1}{1}\int_{-1}^{0} dx\ \cos(k\,\pi\,x) + \frac{1}{1}\int_{0}^{1} dx\ \left(1-x^2\right)\cos(k\,\pi\,x)$$

le cui primitive valgono

$$\left\{\frac{\sin(k\,\pi\,x)}{k\,\pi}, -\frac{2\,x\cos(k\,\pi\,x)}{k^2\,\pi^2} - \frac{(\pi^2\,x^2\,k^2-\pi^2\,k^2-2)\sin(k\,\pi\,x)}{k^3\,\pi^3}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli valgono

$$\left\{0, -\frac{2\,(-1)^k}{k^2\,\pi^2}\right\}$$

Pertanto $a_k = -\frac{2\,(-1)^k}{k^2\,\pi^2}$

I coefficienti dei seni si ottengono da

$$\frac{1}{1}\int_{-1}^{0} dx\ \sin(k\,\pi\,x) + \frac{1}{1}\int_{0}^{1} dx\ \left(1-x^2\right)\sin(k\,\pi\,x)$$

le cui primitive sono

$$\left\{-\frac{\cos(k\,\pi\,x)}{k\,\pi}, \frac{(\pi^2\,x^2\,k^2-\pi^2\,k^2-2)\cos(k\,\pi\,x)}{k^3\,\pi^3} - \frac{2\,x\sin(k\,\pi\,x)}{k^2\,\pi^2}\right\}$$

che calcolate nei rispettivi intervalli diventano

$$\left\{\frac{(-1)^k}{k\,\pi} - \frac{1}{k\,\pi}, \frac{1}{\pi\,k} - \frac{2\,(-1)^k}{\pi^3\,k^3} + \frac{2}{\pi^3\,k^3}\right\}$$

Pertanto $b_k = \frac{(-1)^k\pi^2\,k^2-2\,(-1)^k+2}{k^3\,\pi^3}$