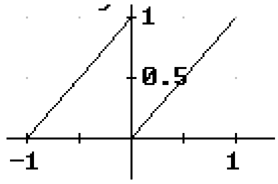
Esercizi con le serie di Fourier

ESERCIZIO 1

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{T}x & x>0\\ A+\dfrac{A}{T}x & x\le 0\end{cases}$$ con semiperiodo T



Svolgimento

Iniziamo dal grafico della funzione dove si è scelto per comodità T=1 e A=1.

Partiamo con il calcolo di

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{A}{T}x\,dx=\frac{2A}{T}\frac{T^2}{2}=A$$

Il grafico del segnale mostra che per una traslazione verso il basso di A/2 il segnale diventa dispari: infatti, avendo posto per comodità $w=k\dfrac{\pi}{T}$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T}^0\left(A+\frac{A}{T}x\right)\cos wx\,dx+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A}{T}x\cos wx\,dx=$$

$$=\left|\frac{A\cos wx}{k^2\pi^2}+A\frac{x+T}{k\pi T}\text{sen }wx\right|_{-T}^{0}+\left|\frac{A\cos wx}{k^2\pi^2}+Ax\frac{\text{sen }wx}{kT\pi}\right|_0^T=0$$

I coefficienti dispari risultano

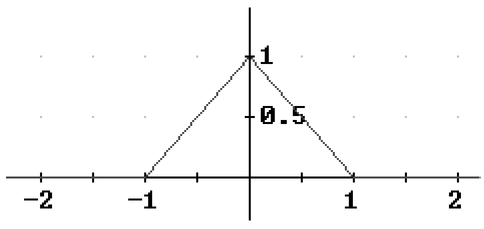
$$b_k=\frac{1}{T}\int_{-T}^0\left(A+\frac{A}{T}x\right)\text{sen }wx\,dx+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A}{T}x\,\text{sen }wx\,dx=-\frac{A(-1)^k}{\pi k}-\frac{A}{\pi k}$$

Lo sviluppo in serie pertanto diventa

$$f^*(x)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+1}{k}\text{sen}\left(k\frac{\pi}{T}x\right)$$

ESERCIZIO 2

$$f(x)=\begin{cases}A-\left|\dfrac{A}{T}x\right| & x<T\\ 0 & altrove\end{cases}$$ con semiperiodo $2T$



Svolgimento

Iniziamo dal grafico della funzione che ci mostra una figura simmetrica rispetto all'asse delle ordinate: concludiamo che la funzione è pari e pertanto i coefficienti dispari b_k saranno tutti nulli.
Iniziamo con il calcolo di

$$a_0=\frac{2}{2T}\frac{AT}{2}=\frac{A}{2}$$

Passiamo ora ai coefficienti dei coseni, avendo posto per comodità $w=k\dfrac{\pi}{2T}$

$$a_k = \frac{2}{2T}\int_0^T \left(A - \frac{A}{T}x\right)\cos wx\ dx = \frac{A}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{x}{T}\right)\cos wx\ dx =$$

$$= \frac{A}{T}\left[\int_0^T \cos wx\ dx - \frac{1}{T}\int_0^T x\cos wx\ dx\right] = \frac{A}{T}\left[\left[\frac{\operatorname{sen} wx}{w}\right]_0^T - \frac{1}{T}\left(\frac{\cos wx}{w^2} + \frac{x}{w}\operatorname{sen} wx\right)_0^T\right] =$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{\operatorname{sen} wT}{w} - \frac{1}{T}\left(\frac{\cos wT - 1}{w^2} + \frac{T}{w}\operatorname{sen} wT\right)\right] = \frac{A}{T}\left(\frac{\operatorname{sen} wT}{w} - \frac{\cos wT - 1}{Tw^2} - \frac{\operatorname{sen} wT}{w}\right) =$$

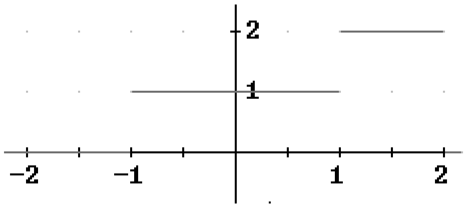
$$= \frac{A}{T}\left(\frac{1 - \cos wT}{Tw^2}\right) = \frac{4A}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos k\frac{\pi}{2}\right)$$

Lo sviluppo in serie pertanto diventa

$$f^*(x) = \frac{A}{4} + \frac{4A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\pi/2)}{k^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2T}x\right)$$

ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2T < x < -T \\ c & -T \le x \le T \\ 2c & T < x < 2T \end{cases} \quad \text{con semiperiodo } 2T$$



Svolgimento

Iniziamo dal grafico della funzione che ci mostra una figura antisimmetrica rispetto al punto (0,1): possiamo concludere che la funzione, se traslata verso il basso di *c* è dispari e pertanto i coefficienti pari a_k saranno tutti nulli tranne

$$a_0 = \frac{1}{2T}(2cT + 2cT) = 2c$$

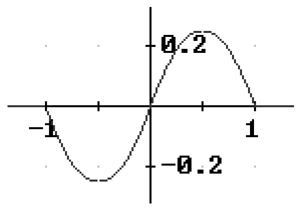
Passiamo ora ai coefficienti dei seni, avendo posto per comodità $w = k\frac{\pi}{2T}$

$$b_k = \frac{2}{2T}\int_0^{2T}(f(x) - c)\operatorname{sen} wx\ dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T 0\ dx + \int_T^{2T} c\operatorname{sen} wx\ dx\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left[c\left(-\frac{\cos wx}{w}\right)\right]_T^{2T} = -\frac{c}{wT}(\cos 2wT - \cos wT) = -\frac{2c}{k\pi}\left((-1)^k - \cos k\frac{\pi}{2}\right)$$

ESERCIZIO 4

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x) & x > 0 \\ x(1+x) & x \le 0 \end{cases} \text{con semiperiodo } 1$$



Svolgimento

Iniziamo dal grafico della funzione che ci mostra una figura simmetrica rispetto all'origine: possiamo concludere che la funzione è dispari e pertanto i coefficienti pari a_k saranno tutti nulli compreso a_0.
Passiamo ora ai coefficienti dei seni, avendo posto per comodità $w = k\pi$

$$b_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\,\text{sen}\,wx\;dx = 2\left(\int_0^1 x\,\text{sen}\,wx\;dx - \int_0^1 x^2\,\text{sen}\,wx\;dx\right) =$$

$$= 2\left(\left[\frac{\text{sen}\,wx}{w^2} - \frac{x}{w}\cos wx\right]_0^1 - \left[\cos wx\left(\frac{2}{w^3}-\frac{x^2}{w}\right)+\frac{2x\,\text{sen}\,wx}{w^2}\right]_0^1\right) =$$

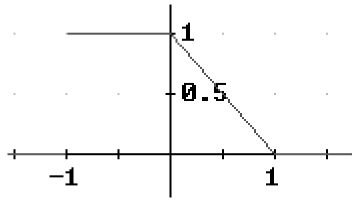
$$= 2\left(\left[\frac{\text{sen}\,w}{w^2}-\frac{\cos w}{w}\right]-\left[\cos w\left(\frac{2}{w^3}-\frac{1}{w}\right)+\frac{2\,\text{sen}\,w}{w^2}-\frac{2}{w^3}\right]\right) =$$

$$= 2\left(\underbrace{\text{sen}\,w\left(\frac{1}{w^2}-\frac{2}{w^2}\right)}_{=0}+\cos w\left(-\cancel{\frac{1}{w}}-\frac{2}{w^3}+\cancel{\frac{1}{w}}\right)+\frac{2}{w^3}\right) =$$

$$= \frac{4}{w^3}(1-(-1)^k) = \frac{4}{\pi^3 k^3}(1-(-1)^k)$$

ESERCIZIO 5

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x>0 \\ 1 & x\le 0 \end{cases} \text{ con semiperiodo 1}$$



Svolgimento

Il grafico della funzione ci mostra una figura una curva né pari né dispari. Iniziamo con

$$a_0 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Passiamo ora ai coefficienti dei coseni, avendo posto per comodità $w = k\pi$

$$a_k = \int_{-1}^0 \cos wx\;dx + \int_0^1 (1-x)\cos wx\;dx =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\text{sen}\,wx}{w}\right]_{-1}^0}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 \cos wx\;dx}_{=0} - \int_0^1 x\cos wx\,dx =$$

$$= -\left[\underbrace{x\frac{\text{sen}\,wx}{w}}_{=0} - \frac{\cos wx}{w^2}\right]_0^1 = \frac{\cos w - 1}{w^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}.$$

I coefficienti dei seni sono:

$$b_k = \int_{-1}^0 \text{sen}\,wx\;dx + \int_0^1 (1-x)\,\text{sen}\,wx\;dx = -\frac{1}{w}[\cos wx]_{-1}^0 + \int_0^1 \text{sen}\,wx\,dx - \int_0^1 x\,\text{sen}\,wx\;dx =$$

$$= -\frac{1}{w}(1-\cos w) - \frac{1}{w}(\cos w - 1) - \left[-x\frac{\cos wx}{w} + \underbrace{\frac{1}{w^2}\,\text{sen}\,wx}_{=0}\right]_0^1 = \frac{\cos w}{w} = \frac{(-1)^k}{k\pi}$$
