Disequazioni trigonometriche

Esercizi da svolgere e svolti con le disequazioni trigonometriche

Esempio numero 1

Risolvere la disequazione

$$\frac{-\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{2})\cos(x)+\sqrt{2}\sin(x)-\sqrt{2}}<0$$

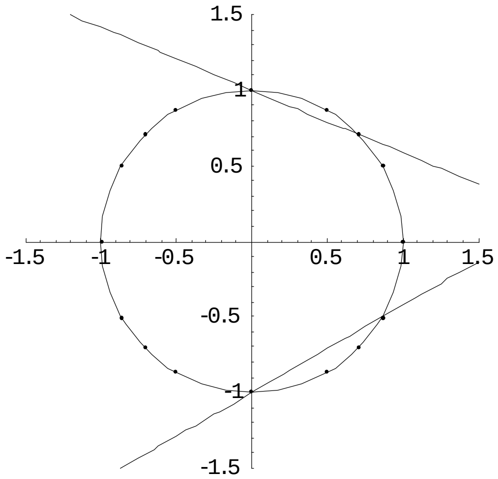
Poniamo per comodità sin(x)=s e cos(x)=c e disegnamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$$-c+\sqrt{3}\,s+\sqrt{3}=0$$

e si tratta di una retta passante per (0,–1) e ($\sqrt{3}$,0) e interseca la circonferenza negli angoli di 270° e 330°. La seconda

$$(2-\sqrt{2})c+\sqrt{2}\,s-\sqrt{2}=0$$

passa per (0,1) e (1/($\sqrt{2}$ –1)) e interseca la circonferenza negli angoli di 90° e 45°.



Nel grafico delle due rette scegliamo la posizione (0,0) come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{-c+\sqrt{3}\,s+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{2})c+\sqrt{2}\,s-\sqrt{2}}<0$$

al posto di c il valore 0 e al posto di s il valore 0 e valutiamo che è vera. Le soluzioni sono pertanto

S=(45°+k360°,90°+k 360°) ∪ (270°+k 360°, 330°+k 360°)

Esempio numero 2

Risolvere la disequazione

$$\frac{4\cos^2(x)+4\sin(x)-1}{-\cos(x)-\sin(x)-1}>0$$

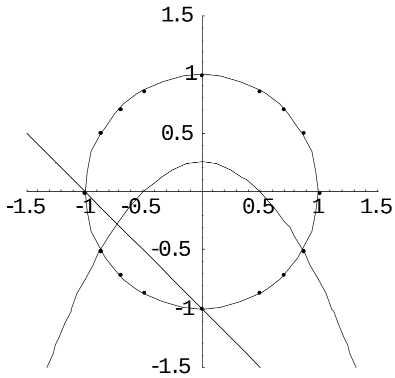
Poniamo per comodità sin(x)=s e cos(x)=c e disegnamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$$4c^2+4s-1=0$$

e si tratta di una parabola con vertice in (0,1/4) e passante per (±1,–3/4) che interseca la circonferenza negli angoli di 210° e 330°. La seconda

$$-c-s-1=0$$

è una retta che passa per (0,–1) e (–1,0) e interseca la circonferenza negli angoli di 180° e 270°.



Nel grafico delle due curve scegliamo la posizione (0,0) come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{4c^2+4s-1}{-c-s-1}>0$$

al posto di c il valore 0 e al posto di s il valore 0 e valutiamo che è vera. Le soluzioni sono pertanto

S=(180°+k360°, 210°+k 360°) ∪ (270°+k 360°, 330°+k 360°)

Esempio numero 3

Risolvere la disequazione

$$\frac{2\sqrt{3}\,\sin^2(x)+\cos(x)}{\sqrt{2}\,\cos^2(x)+\sin(x)}<0$$

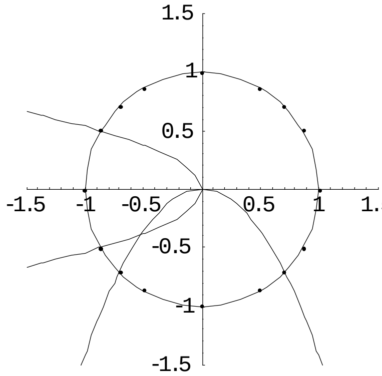
Poniamo per comodità sin(x)=s e cos(x)=c e disegnamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$2\sqrt{3}\,s^2+c=0$

e si tratta di una parabola con vertice in (0,0), asse orizzontale e passante per (–1,±rad3/6) che interseca la circonferenza negli angoli di 150° e 210°. La seconda

$\sqrt{2}\,c^2+s=0$

è una ancora una parabola con vertice nell'origine con asse verticale che interseca la circonferenza negli angoli di 225° e 315°.



Nel grafico delle due coniche scegliamo la posizione (1,1) come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{2\sqrt{3}\,s^2+c}{\sqrt{2}\,c^2+s}<0$$

al posto di c il valore 1 e al posto di s il valore 1 e valutiamo che è falsa.
Le soluzioni sono pertanto
S=(150°+k360°, 210°+k 360°) ∪ (225°+k 360°, 315°+k 360°)

Esempio numero 4

Risolvere la disequazione

$$\frac{4\cos(x)\sin(x)-\sqrt{3}}{\sin(x)-\sqrt{2}\,\cos^2(x)}\leq 0$$

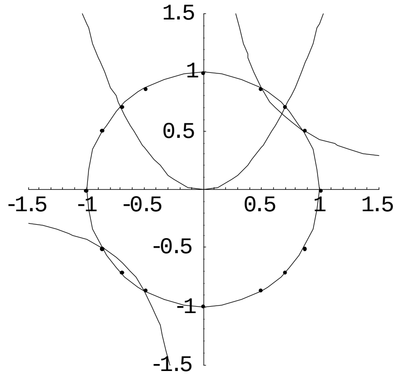
Poniamo per comodità sin(x)=s e cos(x)=c e disegnamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$4cs-\sqrt{3}=0$

e si tratta di una iperbole equilatera che interseca la circonferenza negli angoli di 60°, 30°,210° e 240°. La seconda

$s-\sqrt{2}\,c^2=0$

è una parabola con asse verticale e vertice nell'origine che interseca la circonferenza negli angoli di 45° e 135°.



Nel grafico delle tre coniche scegliamo la posizione (1,1) come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{4cs-\sqrt{3}}{s-\sqrt{2}\,c^2}\leq 0$$

al posto di c il valore 1 e al posto di s il valore 1 e valutiamo che è vera.
Le soluzioni sono pertanto
S=[30°+k360°, 45°+k 360°) ∪ [60°+k 360°, 135°+k 360°) ∪
∪ [210°+k 360°, 240°+k 360°]

Esercizi misti

$$\frac{\sin(x) - 2\sqrt{3}\cos^2(x)}{(-2-\sqrt{3})\cos(x) - \sin(x) - 1} > 0$$

$$\frac{-3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3}}{\cos^2(x) + 2\sin(x) - 2} < 0$$

$$\frac{4\cos^2(x) + 4\sin(x) - 2\sqrt{3} - 1}{(2-\sqrt{2})\cos(x) - \sqrt{2}\sin(x) + \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{\sqrt{2}\cos(x) + (2+\sqrt{2})\sin(x) - \sqrt{2}}{(-2+\sqrt{3})\cos(x) - \sin(x) - 1} \le 0$$

$$\frac{(2-\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) - \sqrt{2}}{\cos(x) - \sqrt{2}\sin^2(x)} > 0$$

$$\frac{2\sin^2(x) + (2-\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{2} - 2}{\cos^2(x) - \sin^2(x) + 1} \ge 0$$

$$\frac{4\cos(x)\sin(x) + \sqrt{3}}{-\cos(x) - \sin(x) - 1} \le 0$$

$$\frac{2\cos^2(x) + 3\sin(x)}{-\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3}} \ge 0$$

$$\frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) + \sqrt{3}}{-\cos(x) + \sin(x) + 1} \le 0$$

$$\frac{-\cos(x) - \sin(x) - 1}{2\cos^2(x) + (2-\sqrt{2})\sin(x) + \sqrt{2} - 2} \le 0$$

$$\csc(x)\sec(x)\left(\cos(x) - 2\sqrt{3}\sin^2(x)\right) \le 0$$

$$\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x) + 1}{-\cos(x) + (2-\sqrt{3})\sin(x) + 1} \le 0$$

$$\frac{2\cos^2(x) + 2\sin(x) + \sqrt{2} - 1}{(2-\sqrt{3})\cos(x) + \sin(x) - 1} \ge 0$$

$$\frac{\sqrt{3}\cos(x) + 3\sin(x) - \sqrt{3}}{(-2+\sqrt{3})\cos(x) - \sin(x) - 1} > 0$$

$$\frac{(2-\sqrt{2})\cos(x) - \sqrt{2}\sin(x) + \sqrt{2}}{\cos(x) - 2\sqrt{3}\sin^2(x)} \ge 0$$

$$\frac{\sin^2(x) + \cos(x) - 1}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + 1} > 0$$

$$\frac{\cos(x) + \sin(x) - 1}{(-2+\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) + \sqrt{2}} \le 0$$

$$\frac{(2-\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) - \sqrt{2}}{\cos(x) - 2\sqrt{3}\sin^2(x)} > 0$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2(x) + \sin(x)}{(-2-\sqrt{3})\cos(x) + \sin(x) + 1} \le 0$$

$$\frac{1}{2}\csc(x)\left(-\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) - \sqrt{3}\right) \le 0$$

$$\frac{(-2-\sqrt{3})\cos(x) - \sin(x) - 1}{2\cos^2(x) + (2-\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} - 2} \le 0$$

$$\csc(x)\sec(x)\left(\sqrt{2}\sin^2(x) + \cos(x)\right) \le 0$$

$$\frac{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + 1}{-\cos(x) + (2+\sqrt{3})\sin(x) + 1} \ge 0$$

$$\frac{4\cos^2(x) + 4\sin(x) - 5}{\cos(x) - \sin(x) + 1} \ge 0$$

$$\frac{\cos(x) + (2-\sqrt{3})\sin(x) - 1}{(-2+\sqrt{3})\cos(x) + \sin(x) + 1} < 0$$

$$\frac{\cos(x) + \sin(x) - 1}{\cos(x) - 2\sqrt{3}\sin^2(x)} > 0$$

$$\frac{2\sin^2(x) + \cos(x) - 1}{\cos^2(x) - \sin^2(x) + 1} \le 0$$

$$\frac{4\cos(x)\sin(x) + \sqrt{3}}{(-2-\sqrt{3})\cos(x) - \sin(x) - 1} \le 0$$

$$\frac{-\sqrt{2}\cos(x) + (-2-\sqrt{2})\sin(x) - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\cos(x) + (2-\sqrt{2})\sin(x) - \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{2}\sin^2(x)}{4\cos(x)\sin(x) + \sqrt{3}} < 0$$

$$\frac{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) - 1}{-\sqrt{3}\cos(x) + 3\sin(x) + \sqrt{3}} \le 0$$

$$\frac{2\cos^2(x) + 2\sin(x) - \sqrt{2} - 1}{\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{3}} \ge 0$$

$$\frac{\cos(x) + (2+\sqrt{3})\sin(x) - 1}{-\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3}} \ge 0$$

$$\frac{2\sin^2(x) + (2-\sqrt{3})\cos(x) + \sqrt{3} - 2}{\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1} \le 0$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2(x) + \sin(x)}{(-2-\sqrt{3})\cos(x) + \sin(x) + 1} \le 0$$

$$\frac{1}{2}\csc(x)\left(-\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) - \sqrt{3}\right) \le 0$$

$$\csc(x)\sec(x)\left(\sqrt{2}\sin^2(x) + \cos(x)\right) \le 0$$