Simulazione della terza prova dell'Esame di Stato
classe 5B Meccanica, 19 Marzo 2003

Testi e soluzioni

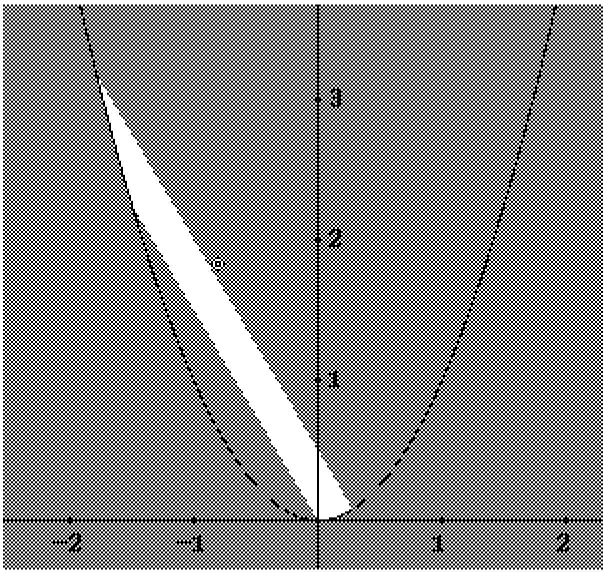
quesito uno

Individuare graficamente il dominio della funzione reale $f(x,y)=\sqrt{\arcsin(1-3x-2y)}+\ln(y-x^2)$

Le condizioni di esistenza della funzione sono:

$$\begin{cases} -1 \le 1-3x-2y \le 1 \\ \arcsin(1-3x-2y) \ge 0 \\ y-x^2>0 \end{cases}$$

Le prime due possono ricondursi a
$0 \le 1-3x-2y \le 1$
e descrivono la fascia interna a due rette parallele.
La terza condizione invece definisce la zona delimitata inferiormente dalla parabola $y=x^2$



quesito due

Approssima il valore del seguente integrale definito $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ a meno di un centesimo

Si può determinare la primitiva e calcolare il valore esatto:
ponendo $x=y^2 \rightarrow dx=2y\,dy$ e

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx=\int 2ye^y\,dy=2(ye^y-e^y)=2e^y(y-1)=2\left[e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right]_0^4=2\left(e^2-1(-1)\right)=2(e^2+1)\approx 16.77$$

Si possono utilizzare anche gli sviluppi in serie di Taylor

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^n}{n!}dx=\int_0^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^4 x^{n/2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{x^{n/2+1}}{\frac{n}{2}+1}\right]_0^4=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{n!}\frac{2^n}{\frac{n}{2}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{n!}\frac{2^n}{n+2}\approx$$

$$=4+\frac{16}{3}+\frac{32}{15}+\frac{8}{9}+\frac{32}{105}+\frac{4}{45}+\frac{64}{2835}+\frac{8}{1575}+\ldots\approx 4+5.33+4+2.13+0.88+0.30+0.08+0.02+0.005\approx 16.77$$

quesito tre

Determinare i punti stazionari della funzione reale $f(x,y)=x\,y\,(4-x^2-y^2)$

La funzione non presenta problemi per il dominio: pertanto calcoleremo le derivate parziali

$f'x = 4y - 3x^2 y - y^3 = y(4 - 3x^2 - y^2)$
$f'y = 4x - x^3 - 3x y^2 = x(4 - x^2 - 3y^2)$
La rappresentazione grafica delle derivate parziali include gli assi cartesiani e due ellissi di centro nell'origine: l'intersezione può essere estrapolata nei punti $(\pm 2,0)$, $(0,\pm 2)$ e $(\pm 1,\pm 1)$