La serie armonica di ordine *p*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

è convergente per *p>1.*

Dimostrazione

Scriviamo la somma generale nel seguente modo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=$$

$$=\frac{1}{1^p}+$$

$$+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+$$

$$+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+$$

$$+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\ \ ...\ \ +\frac{1}{15^p}+$$

$$+...+$$

$$+\frac{1}{(2^n)^p}+...+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}+$$

$$+...........................$$

Definendo ciascuna riga con

$$a_n=\frac{1}{(2^n)^p}+...............+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}$$

essa è una somma di 2^n termini positivi decrescenti all'aumentare di n: ebbene considerato che la somma di questi è minore del prodotto del numero dei termini per il maggiore di essi si ha che

$$0<a_n\le\underbrace{2^n}_{\text{numero termini}}\underbrace{\frac{1}{(2^n)^p}}_{\text{termine massimo}}=2^{n-np}=(2^{1-p})^n\ .$$

I termini della serie armonica sono minoranti di una serie geometrica di ragione 2^{1-p} e pertanto di carattere convergente quando

$$2^{1-p}<1\ \rightarrow 1-p<0\ \rightarrow\ p>1$$

Se invece *p=1* allora si dimostra che

$$a_n\ge 2^n\ \frac{1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^n}{2\cdot 2^n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{2^n}}>\frac{1}{2}$$

e pertanto il carattere della serie è divergente.

Se *p<1* la serie diventa maggiorante di quella di ordine 1 e pertanto divergente.