

Compito di trigonometria e goniometria

modello A

$$\tan 2a - \tan a = \frac{1}{2} \sec^2 a \tan 2a$$

$$\frac{\sin 2a}{\cos 2a} - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{2 \cos^2 a} \frac{\sin 2a}{\cos 2a}$$

$$\frac{\sin 2a \cos a - \sin a \cos 2a}{\cos 2a \cos a} = \frac{2 \sin a \cos a}{2 \cos 2a \cos^2 a}$$

$$\sin(2a - a) = \sin a$$

$$\tan x = 1$$

Si tratta di una equazione elementare che ha per radice $x = \pi/4 + k\pi$

$$(\sqrt{3} - 2) \sin x - \cos x + 1 = 0$$

Poniamo $s = \sin x$ e $c = \cos x$ e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} (\sqrt{3} - 2)s - c + 1 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano sc passa per i punti $(1,0)$ e $(0, 1/(2-\sqrt{3}))$.

Ricavando $c = (\sqrt{3} - 2)s + 1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$((\sqrt{3} - 2)s + 1)^2 + s^2 = 1$$

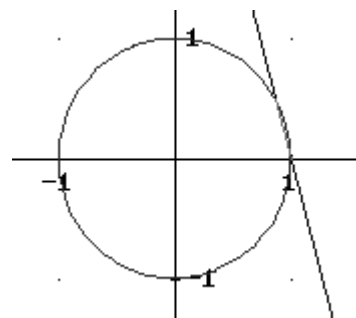
$$(7 - 4\sqrt{3})s^2 + 1 + 2(\sqrt{3} - 2)s + s^2 = 1$$

$$(8 - 4\sqrt{3})s^2 + 2(\sqrt{3} - 2)s = 0$$

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono $x = 2k\pi$ e $x = \pi/6 + 2k\pi$



$$\cos x = \sqrt{2} \sin x \cos x$$

Portando al primo membro e raccogliendo a fattor comune il coseno di x si ha

$$\cos x(1 - \sqrt{2} \sin x) = 0$$

$$\cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui $x = \pi/2 + k\pi \vee x = \pi/4 + 2k\pi \vee x = 3\pi/4 + 2k\pi$

Determina perimetro e area del quadrilatero ABCD dove gli angoli DAB, CAB, ABD e DBC sono di 80° , 20° , 30° e 100° e il lato AB unitario.

Per il teorema dei seni si ha che

$$AD = \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(70^\circ)} \cong 0.53$$

$$AC = \frac{\sin(130^\circ)}{\sin(30^\circ)} \cong 1.53$$

$$BC = \sin(20^\circ)/\sin(30^\circ) \cong 0.68$$

Con il teorema di Carnot pertanto $DC \cong 1.34$. Il perimetro è 3.55 e l'area 0.61.

modello B

$$\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \frac{\cos 2a}{1 - \sin 2a}$$

$$1 + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{1 - \sin 2a}$$

$$1 - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{1 - \sin 2a}$$

$$\frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} = \frac{(\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)}{1 - 2 \sin a \cos a}$$

$$\frac{1}{\cos a - \sin a} = \frac{\cos a - \sin a}{1 - 2 \sin a \cos a}$$

$$1 - 2 \sin a \cos a = (\cos a - \sin a)^2$$

$$1 - 2 \sin a \cos a = \cos^2 a + \sin^2 a - 2 \sin a \cos a$$

$$1 = \sin^2 a + \cos^2 a$$

$$\frac{1}{1 - \tan^2 x} = 0$$

Equazione riconducibile alle equazioni elementari $\tan x = \pm 1$ e pertanto $x = \pi/4 + k\pi/2$

$$\sin x - (1 + \sqrt{2}) \cos x + 1 = 0$$

Poniamo $s = \sin x$ e $c = \cos x$ e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} s - (1 + \sqrt{2})c + 1 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano sc passa per i punti $(0, -1)$ e $(1/(1 + \sqrt{2}), 0)$. Ricavando $s = (\sqrt{2} + 1)c - 1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$c^2 + [(\sqrt{2} + 1)c - 1]^2 = 1$$

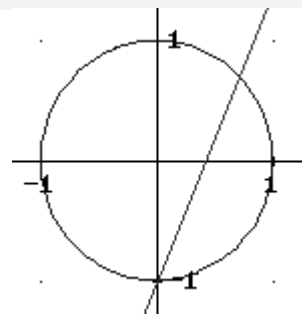
$$c^2 + (3 + 2\sqrt{2})c^2 - 2(\sqrt{2} + 1)c + 1 = 1$$

$$2(2 + \sqrt{2})c^2 - 2(\sqrt{2} + 1)c = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 2} = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 2)}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono $x = 3/2\pi + 2k\pi$ e $x = \pi/4 + 2k\pi$



$$\frac{1}{\cos 2x} = \sin 2x$$

Ponendo $2x = y$ si ha l'equazione omogenea $\sin y = \cos y$ che è risolta per $y = \pi/4 + k\pi$; pertanto

$$2x = \pi/4 + k\pi \rightarrow x = \pi/8 + k\pi/2$$

Il triangolo di lati 5,4 e 7 è ottusangolo? Perché?

Il triangolo è ottusangolo perché applicando il teorema di Carnot si ha che

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \theta \rightarrow 49 = 41 - 40 \cos \theta \rightarrow \cos \theta = -1/5 \rightarrow \theta \text{ è un angolo ottuso.}$$

modello C

$$\frac{\tan 2a + \sin 2a}{\cos^2 a} = \frac{\tan 2a - \sin 2a}{\sin^2 a}$$

$$\frac{\frac{\sin 2a}{\cos 2a} + \sin 2a}{\cos^2 a} = \frac{\frac{\sin 2a}{\cos 2a} - \sin 2a}{\sin^2 a}$$

$$\frac{\sin 2a + \sin 2a \cos 2a}{\cos 2a \cos^2 a} = \frac{\sin 2a - \sin 2a \cos 2a}{\cos 2a \sin^2 a}$$

$$\frac{\sin 2a(1 + \cos 2a)}{\cos^2 a} = \frac{\sin 2a(1 - \cos 2a)}{\sin^2 a}$$

$$\frac{1 + \cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a + \sin^2 a}{\sin^2 a}$$

$$2 = 2$$

$$1/\tan x = \sqrt{3}$$

$$\text{Segue che } \tan x = 1/\sqrt{3} \rightarrow x = \pi/6 + k\pi$$

$$\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x - \sqrt{3} = 0$$

Poniamo $s = \sin x$ e $c = \cos x$ e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3}s + 3c - \sqrt{3} = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano sc passa per i punti $(0, 1)$ e $(1/\sqrt{3}, 0)$. Ricavando $s = -\sqrt{3}c + 1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$c^2 + [1 - \sqrt{3}c]^2 = 1$$

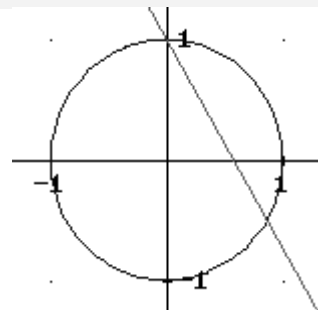
$$c^2 + 1 + 3c^2 - 2\sqrt{3}c = 1$$

$$4c^2 - 2\sqrt{3}c = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono $x = \pi/2 + 2k\pi$ e $x = -\pi/6 + 2k\pi$



$$(\sqrt{3} - 2 \sin x)(\sqrt{3} - 2 \cos 2x) = 0$$

L'equazione si può ricondurre a due equazioni elementari:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \pi/3 + 2k\pi \vee x = 2/3\pi + 2k\pi$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2x = \pm\pi/6 + k\pi \rightarrow x = \pm\pi/12 + k\pi/2$$

⌘ Determina perimetro e area del triangolo ABC dove AB=1 e gli angoli in A e B sono di 30° e di 45°
Per il teorema dei seni l'area di un triangolo di lato L e con gli angoli adiacenti α e β vale

$$A_{\text{triangolo}} = \frac{1}{2} L^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Pertanto nel nostro caso l'area vale $\frac{1}{2} \frac{\sin 30^\circ \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \approx 0.183$

|| modello D

⌘
$$\sin(30^\circ - a) + \cos(30^\circ + a) = \frac{(1 + \sqrt{3}) \cos 2a}{2(\cos a + \sin a)}$$

$$\frac{1}{2} \cos a - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a + \frac{1}{2} \sin a = \frac{(1 + \sqrt{3})(\cos^2 a - \sin^2 a)}{2(\cos a + \sin a)}$$

$$\cos a \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \sin a \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3})(\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)}{2(\cos a + \sin a)}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\cos a - \sin a) = \frac{(1 + \sqrt{3})(\cos a - \sin a)}{2}$$

⌘ $3 - 4 \sin^2 x = 0$

Equazione riconducibile alle due elementari

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

che ammettono per radici i numeri $x = \pm\pi/3 + 2k\pi \vee x = \pm 2/3\pi + 2k\pi$

⌘ $(\sqrt{3} - 2) \cos x - \sin x + 1 = 0$

Poniamo $s = \sin x$ e $c = \cos x$ e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} (\sqrt{3} - 2)c - s + 1 = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

La retta nel piano cartesiano sc passa per i punti $(0, 1)$ e $(1/(2-\sqrt{3}), 0)$. Ricavando $s = (\sqrt{3} - 2)c + 1$ e sostituendo nella equazione della circonferenza goniometrica otteniamo

$$c^2 + [(\sqrt{3} - 2)c + 1]^2 = 1$$

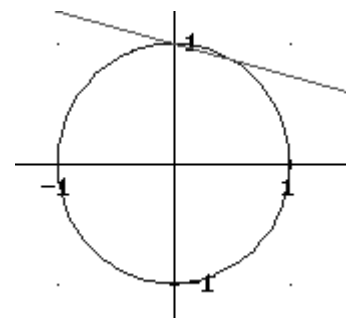
$$c^2 + (7 - 4\sqrt{3})c^2 + 2(\sqrt{3} - 2)c + 1 = 1$$

$$4(2 - \sqrt{3})c^2 + 2(\sqrt{3} - 2)c = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

Pertanto gli angoli incogniti sono $x = \pi/2 + 2k\pi$ e $x = \pi/3 + 2k\pi$



$$\zeta \cos 2x = \sin x$$

Sviluppando $\cos 2x$ si ha

$$1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

$$2s^2 + s - 1 = 0$$

$$s = -1 \vee s = 1/2 \rightarrow x = k\pi \vee x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5/6\pi + 2k\pi$$

ζ Determina perimetro e area del triangolo ABC dove $AB=9$, $AC=7$ e il coseno dell'angolo in C vale $2/7$

Chiamando con x la misura del lato BC si ha per il teorema di Carnot

$$9^2 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7x \frac{2}{7}$$

$$81 = 49 + x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 + 32} = 2 \pm 6 = \{8, -4\}$$

Pertanto la misura accettabile di BC è 8. Il perimetro sarà 24 e l'area, con la formula di Erone è

$$A = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} = 12\sqrt{5}$$

Ora ... *fate vobis*

|| modello E

$$\zeta \tan 2b - \tan b = \frac{\tan 2b}{2\cos^2 b}$$

$$\zeta 3 \tan^2 x = 1$$

$$\zeta \sin x - (\sqrt{2} + 1)\cos x + 1 = 0$$

$$\zeta 3 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

ζ Il triangolo di lati 5, 6 e 7 è ottusangolo? Perché?

|| modello F

$$\zeta \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$$

$$\zeta 4 \cos^2 x = 1$$

$$\zeta \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\zeta \sin 2x = \sin 3x$$

ζ Determina perimetro e area del triangolo ABC dove $AB=3$ e gli angoli in A e B sono di 60 e 75 gradi