Progressioni geometriche e musica

Il sistema musicale secondo il quale si calcolano le frequenze delle varie note è il famoso sistema temperato o equabile: assegnando ad una nota di partenza la frequenza f_0 (per esempio il La a 440 Hz) si impone che l'ottava superiore sia di frequenza $2f_0$: nelle 12 note comprese dalla scala si impone inoltre che il rapporto fra la frequenza di una nota e quella della successiva sia costante. Chiamando *k* tale costante si ha che

La	440.00
Sib	466.16
Si	493.88
Do	523.25
Do#	554.37
Re	587.33
Mib	622.25
Mi	659.26
Fa	698.46
Fa#	739.99
Sol	783.99
Sol#	830.61
La	880.00

$k^{12} = 2$

e pertanto $k = \sqrt[12]{2} \simeq 1.059463094$.

Si genera quindi una successione geometrica di valori di ragione k, dove i bemolli di una nota coincidono con i diesis della precedente.

Tale scelta, ovviamente oculata, rende possibile non solo la trasposizione in una qualsiasi tonalità di una linea melodica (con il sistema zerliniano precedente al temperato non era consentito: il fa diesis, per esempio, era leggermente diverso dal sol bemolle) ma consente anche la costruzione di strumenti a corda adatti per ogni tonalità.

Il caso della chitarra ne è un bell'esempio: fissata con la tensione del bischero la frequenza della corda a vuoto, la variazione della lunghezza di quest'ultima con i capotasti genera vibrazioni della corda che producono frequenze in scala temperata, o dal punto di vista matematico, in successione geometrica.

Se la frequenza della corda a vuoto di lunghezza L_0 è f_0, la frequenza della nota successiva sarà $f_1 = k\, f_0$: dal momento che la frequenza è inversamente legata alla lunghezza si ha che

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{L_1}{L_0}$$

e pertanto

$$L_1 = L_0 \frac{f_0}{k\, f_0} = \frac{L_0}{k}$$

Il primo capotasto avrà lunghezza $c_1 = L_0 - L_1 = L - \frac{L}{k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)L$

Ripetendo il ragionamento $\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}$ e dunque $L_2 = \frac{k\, f_0}{k^2\, f_0} L_1 = \frac{L_1}{k}$. Il secondo capotasto sarà di lunghezza $c_2 = L_1 - L_2 = \frac{L}{k} - \frac{L}{k^2} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)L = \frac{c_1}{k}$

Generalizzando si avrà che $\frac{f_j}{f_{j+1}} = \frac{L_{j+1}}{L_j}$ da cui $\frac{1}{k} = \frac{L_{j+1}}{L_j} \rightarrow L_{j+1} = \frac{1}{k} L_j \rightarrow L_j = \frac{1}{k^j} L_0$

In tal senso si ha che $L_{12} = \frac{L_0}{k^{12}} = \frac{1}{2} L_0$ nel rispetto della posizione della scala temperata.

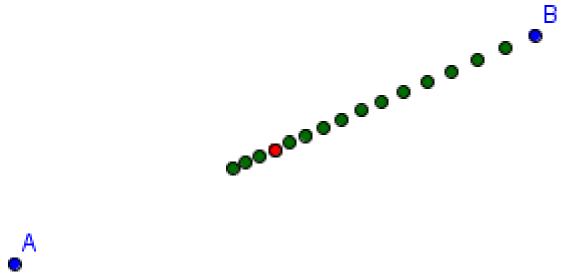
In generale i capotasti avranno lunghezza $c_i = L_{j+1} - L_j = \frac{L_0}{k^{j+1}} - \frac{L_0}{k^j} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) L_0 \frac{1}{k^j}$

Per verificare la bontà dei risultati, sommiamo le lunghezze dei primi 12 capotasti[1]:

$$\sum_{i=1}^{12} c_i = \left(1-\frac{1}{k}\right)L_0\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{k^{i-1}} = \left(1-\frac{1}{k}\right)L_0\sum_{i=0}^{11}\frac{1}{k^{i}} = \left(1-\frac{1}{k}\right)L_0\,\frac{1-\dfrac{1}{k^{12}}}{1-\dfrac{1}{k}} = \frac{L_0}{2},$$

ovvero proprio metà corda.
Verifichiamo allora con GeoGebra l'applicazione della regola vista.
Creiamo la funzione chitarra[A,B] che genera i punti dei capotasti in sequenza geometrica

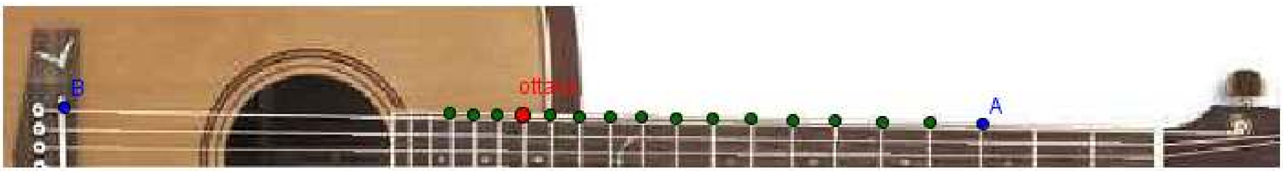
```
Chitarra[A,B]=Successione[A+(B-A)*2^(-j/12), j, 1, 15]
```



Il punto rosso, il punto medio di AB, rappresenta il 12mo capotasto dell'ottava superiore.

Definita allora la funzione precedente basterà sovrapporre alla immagine di una chitarra la successione geometrica, avendo cura di far corrispondere ai punti A e B i due ponti di appoggio delle corde.

Spostando la posizione della corda a vuoto, le nuove posizioni ricalcolate coincidono ancora con i capotasti presenti sul manico, con l'ottava superiore naturalmente spostata (da Mi a Sol).



Tale calcolo vale per tutta la famiglia delle chitarre, elettriche, bassi & C:

Simpatico, vero?

---

[1] Si dimostra che $\sum_{i=0}^{N} q^i = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$ per ogni valore di q