Esercizi di recupero per le serie numeriche

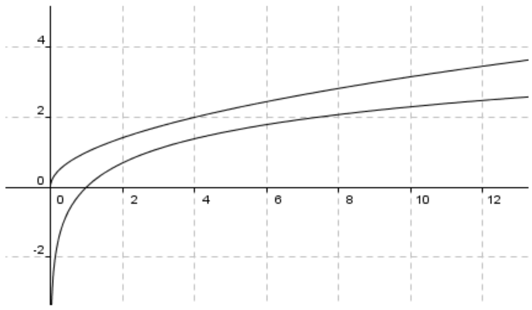
I. Data la serie $\sum \frac{1}{\ln^2 n}$

1. **determina se la successione è infinitesima**

   dal momento che $\ln n$ tende ad infinito per n tendente a infinito, segue che il suo reciproco sia infinitesimo

2. **determina il carattere convergente, divergente o indeterminato**

   dal momento che $\ln n < \sqrt{n}$ si ha che $\ln^2 n < n$. Pertanto $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln^2 n}$. Essendo la minorante una armonica di carattere divergente, anche la serie in questione sarà di carattere divergente

3. **illustra il criterio adottato per una serie qualsiasi**

   il criterio dei due carabinieri afferma che se per una serie $\sum a_n$ esistono due successioni tali che, per ogni $n > \overline{n}$ $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$, allora
   - se $\sum \alpha_n$ è divergente allora è divergente anche $\sum a_n$
   - se $\sum \alpha_n$ e $\sum \beta_n$ convergono allora converge anche $\sum a_n$

II. Data la serie $\sum \frac{2^n}{5^{-n} + 3^n}$

1. **è infinitesima?**

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^{-n} + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{... + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

2. **determina il carattere convergente, divergente o indeterminato**

   dall'analisi del comportamento della successione per n tendente all'infinito segue che possiamo confrontarla con la serie $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$, geometrica di ragione minore di uno e pertanto convergente. Applicando il criterio del confronto e impostando il limite si ha

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{5^{-n} + 3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{... + 3^n} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{... + 3^n} = 1\,;$$

essendo finito e non nullo si conclude che la serie in questione è convergente.

3. **illustra il criterio adottato per una serie qualsiasi**

   il criterio del confronto afferma che se due serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono tali che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ allora le serie hanno lo stesso carattere.

III. Data la serie $\sum \frac{n^5}{\sqrt{n + n^{12}}}$

---

1. **verifica che è infinitesima**

   essendo la potenza del numeratore inferiore (5) a quella del denominatore (6) si può concludere che la successione è infinitesima

2. **determina il carattere convergente o divergente**

   dalle disuguaglianze $\frac{n^5}{\sqrt{n+n^{12}}} > \frac{n^5}{\sqrt{n^{12}+n^{12}}} = \frac{n^5}{\sqrt{2n^{12}}} = \frac{1}{\sqrt{2}n}$ segue che la serie in questione è una maggiorante della armonica di ordine uno e pertanto è divergente.

3. **illustra il criterio adottato per una serie qualsiasi**

   un caso del criterio dei due carabinieri afferma che se per una serie $\sum a_n$ esiste una successione tale che, per ogni $n > \overline{n}$ $\alpha_n \leq a_n$, allora se $\sum \alpha_n$ è divergente allora è divergente anche $\sum a_n$

IV. Data la serie $\sum \left(\sqrt{n + n^2} - n \right)$

---

1. **verifica se è infinitesima**

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+n^2} - n \right) \frac{\sqrt{n+n^2}+n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2-n^2}{2n} = \frac{1}{2}$$

2. **determina il carattere convergente, divergente o indeterminato**

   non essendo infinitesima il carattere sarà divergente in quanto somma infinita di termini positivi

V. Data la serie $\sum \frac{5^n + 3^n}{8^n}$

---

1. **verifica che è infinitesima**

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+3^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n(1+...)}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{8^n} = 0$$

2. **determina il carattere convergente o divergente**

   Applicando il criterio del rapporto si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{8^{n+1}}}{\frac{5^n+3^n}{8^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{8^{n+1}}\frac{8^n}{5^n+3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 5^n(1+...)}{8\cdot 8^n}\frac{8^n}{5^n(1+...)} = \frac{5}{8} < 1$$

pertanto la serie converge

3. **illustra il criterio adottato per una serie qualsiasi**

   il criterio del rapporto afferma che per una serie $\sum a_n$

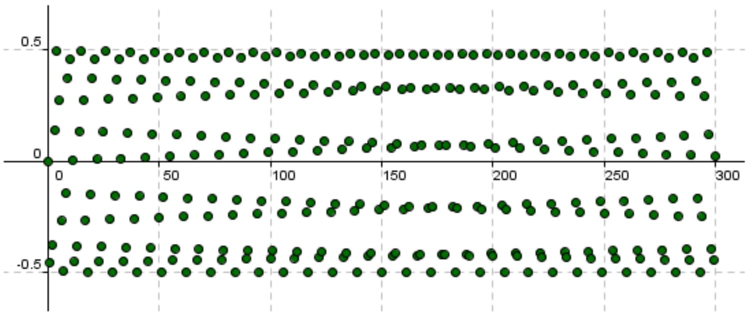
   se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ allora la serie è convergente. (NB: il criterio non dice nulla se il limite è unitario o superiore)

VI. Data la serie $\sum(-1)^n \sin n \cos n$

---

1. **verifica se è infinitesima**

   dalla tabulazione dei primi trecento punti della successione si nota una indeterminazione che deriva anche dalla

   periodicità della funzione sin x cos x calcolata per valori (in radianti) non riconducibili a multipli di uno stesso angolo notevole. La successione pertanto non è infinitesima ma indeterminata

2. **determina il carattere convergente o divergente**

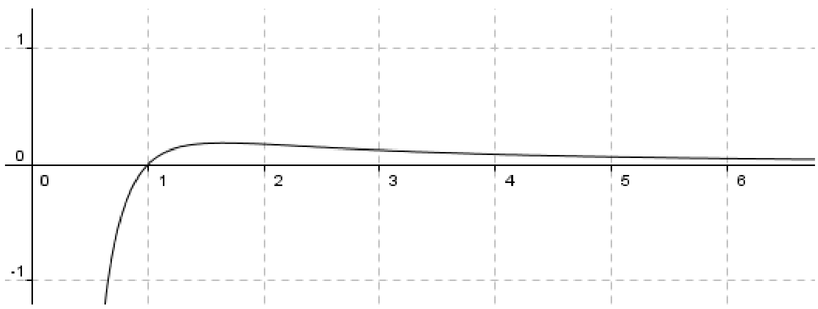
   per il comportamento della successione il carattere della serie non può che essere indeterminato

VII. Data la serie $\sum\frac{\ln n}{n^2}$

---

1. **verifica che la successione è infinitesima**

   essendo il quadrato di un numero decisamente superiore al suo logaritmo, la

successione risulta infinitesima, come può confermare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

2. **determina il carattere convergente o divergente**

   una prima possibilità consiste nell'osservare che $\ln n < \sqrt{n}$ e pertanto $0 \le \dfrac{\ln n}{n^2} \le \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Applicando il criterio dei due carabinieri con l'armonica di ordine maggiore dell'unità (3/2) si dimostra la convergenza della serie.

   Applicando invece il criterio dell'integrale si ha che $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{ye^y dy}{e^{2y}} = \int_0^\infty ye^{-y}dy = \lim_{A\to\infty}\left[-ye^{-y} - e^y\right]_0^A = 1$, avendo posto $x = e^y$. Convergendo l'integrale improprio di prima specie converge anche la serie relativa

3. **illustra il criterio adottato per una serie qualsiasi**

   il criterio dell'integrale afferma che per una serie $\displaystyle\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ se esiste una funzione reale f tale che $f(n) = a_n \;\; \forall n \ge n_0$, il carattere della serie è lo stesso dell'integrale improprio $\displaystyle\int_{n_0}^\infty f(x)\,dx$

VIII. Data la serie $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$

---

1. **verifica che la successione è infinitesima**

   dal momento che il denominatore tende a infinito la successione è infinitesima

2. **determina il carattere convergente o divergente**

   trattandosi di una serie a segni alterni infinitesima verifichiamo se la parte positiva della successione è decrescente: considerando la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$ si verifica che la sua derivata è $f'(x) = \dfrac{1}{\ln x}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}\,\ln x}$ ed è pertanto negativa; consegue allora che la successione è decrescente e la serie convergente

3. **illustra il criterio adottato per una serie qualsiasi**

   il criterio di Leibnitz afferma che una serie (a segni alterni) della forma $\sum(-1)^n a_n$ con $a_n > 0$, se è infinitesima e $a_{n+1} < a_n \;\; \forall n > \overline{n}$, allora è convergente.