Teoria semiseria di alcune serie con i logaritmi

proposizione 1: $\forall \alpha > 0 \ \exists \overline{n}_\alpha : \forall n > \overline{n}_\alpha \ \ln n < n^\alpha$

Dim. Considerando il limite per x tendente all'infinito di

$$\frac{\ln x}{x^\alpha}$$

in base al teorema di De l'Hospital possiamo affermare che

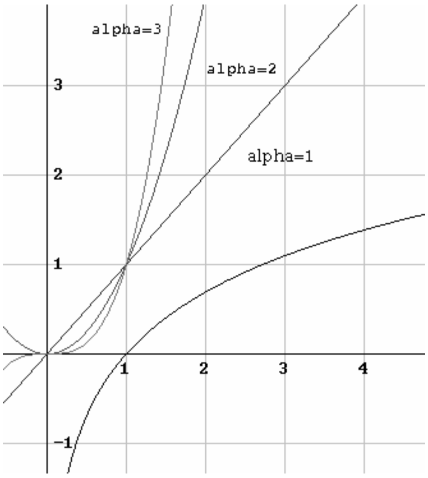
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

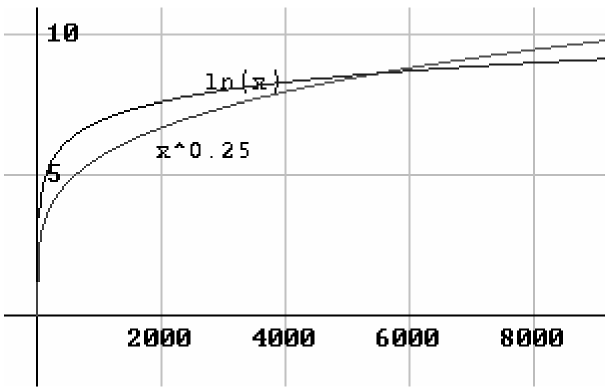
in quanto α positivo per ipotesi.
Pertanto, in base alla definizione di limite finito possiamo dedurre che

$$\exists \overline{n} \ : \quad \forall x > \overline{n} \quad \left| \frac{\ln x}{x^\alpha} - 0 \right| < 1$$

da cui la tesi.†

La proprietà 1 è evidente per α>1: dal grafico della curva logaritmica e delle polinomiali intere possiamo dedurre che la relazione $\ln n < n^\alpha$ è sempre vera





Non lo è invece per 0<α<1: si può verificare che per α=1/*e* le curve si intersecano nel punto di ascissa e^e. Per 0<α<1/e le curve si intersecano in due punti distinti per cui la proprietà è soddisfatta per n maggiore del massimo dei due. Va da sé che se α è molto piccolo il valore di $\overline{n}_\alpha$ deve essere molto grande.

proposizione 2: la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^b n}{n^a}$ converge per a>1

Dim: Partiamo dal caso b≤0: la successione può scriversi nella forma

$$0 < \frac{1}{\ln^{|b|} n \, n^a} < \frac{1}{n^a}$$

e diventa minorante di una serie armonica generalizzata di carattere convergente quando a>1, da cui la tesi;
se b>0 allora possiamo porre per comodità a=1+ε con ε>0. In base alla prop.1 da un certo $\overline{n}$ in poi

$$\ln n < n^{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{b}}$$

elevando entrambi i membri alla potenza di b e dividendo tutto per n^a si ha che

$$0 \le \ln^b n < n^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

e che

$$0 \le \frac{\ln^b n}{n^a} < \frac{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

Per il criterio dei due carabinieri pertanto la serie converge. †

proposizione 3: la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ diverge per ogni p

Dim: sempre in base alla prop. 1 quando p>0

$$\ln n < n^{\frac{1}{p}}$$

e pertanto

$$\ln^p n < n$$

Facendo i reciproci di entrambi i membri e invertendo dunque il verso della disuguaglianza si ha che

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln^p n}$$

La serie, essendo maggiorante della armonica, diverge.
Se p≤0 la serie diverge perché non infinitesima. †

proposizione 4: la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge

Dim: La successione degli addendi può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned}
&a_2 + \\
&a_3 + a_4 + \\
&a_5 + \ldots + a_8 + \\
&a_9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{16} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&a_{2^m+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2^{m+1}} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dove $a_n = \frac{1}{n \ln n}$.

Definendo ciascuna riga con

$$b_m = a_{2^m+1} + \ldots\ldots + a_{2^{m+1}}$$

è facile dimostrare che il carattere della serie $\sum a_n$ è lo stesso della serie $\sum b_m$.

Ora

$$b_m > \underbrace{2^m}_{\text{numero termini}} \underbrace{a_{2^{m+1}}}_{\text{termine minimo}} = 2^m \frac{1}{2^{m+1} \ln(2^{m+1})} = \frac{1}{2(m+1)\ln 2}$$

la somma dei gruppi della serie è maggiorante dell'armonica e pertanto diverge. †

proposizione 5: la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ converge

Dim: come nella prop. 4

$$0 < b_m < 2^m a_{2^m+1} = \frac{2^m}{(2^m+1)\ln^2(2^m+1)} =$$

$$= \frac{2^m}{2^m+1} \frac{1}{\ln^2(2^m(1+...))} < \frac{1}{\ln^2(2^m)} = \frac{1}{m^2 \ln^2 2}$$

essendo minorante di uan armonica di ordine 2 è pertanto convergente†.

proposizione 6: la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n}$ diverge

Dim: come nelle posizioni precedenti

$$b_m > 2^m \frac{1}{\sqrt{2^{m+1}} \ln^2 2^{m+1}} = \frac{\sqrt{2^m}}{\sqrt{2}(m+1)^2 \ln^2 2}$$

che non è nemmeno infinitesima. Pertanto la serie diverge. †

Esercizi per il laboratorio di matematica e informatica

1. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n+1}$
   - ❑ dimostra il carattere convergente
   - ❑ stima la somma a meno di un milionesimo
   - ❑ tabula i seguenti valori, scrivendo e utilizzando una procedura con l'elaboratore

ε (precisione)	# iterazioni
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
….	
10^−9	

2. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$
   - ❑ tabula e disegna il grafico dei valori della successione per n≤500
   - ❑ disegna la successione delle ridotte per n≤500
   - ❑ formula le tue considerazioni
3. Data la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$
   - ❑ tabula e disegna i valori della successione per n≤1000
   - ❑ disegna i valori della ridotta per n≤1000
   - ❑ dimostra la convergenza
   - ❑ calcola quante iterazioni servono per avere una stima con un errore di 10^−5
4. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n}$
   - ❑ tabula e disegna i valori per n≤500
   - ❑ la successione è monotona?
   - ❑ è a segni alterni?
   - ❑ esprimi le tue considerazioni

5. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
   - dimostrane la convergenza
   - approssimane la somma a meno di un miliardesimo
   - scrivi un programma per la sua approssimazione
6. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^2 n$
   - tabula e disegna i primi 200 valori di a(n) e di s(n)
   - esprimi le tue considerazioni