

Disequazioni trigonometriche

Esercizi da svolgere e svolti con le disequazioni trigonometriche

Esempio numero 1

Risolvere la disequazione

$$\frac{-\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{2}) \cos(x) + \sqrt{2} \sin(x) - \sqrt{2}} < 0$$

Poniamo per comodità $\sin(x)=s$ e $\cos(x)=c$ e disegniamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$$-c + \sqrt{3}s + \sqrt{3} = 0$$

e si tratta di una retta passante per $(0,-1)$ e $(\sqrt{3},0)$ e interseca la circonferenza negli angoli di 270° e 330° . La seconda

$$(2 - \sqrt{2})c + \sqrt{2}s - \sqrt{2} = 0$$

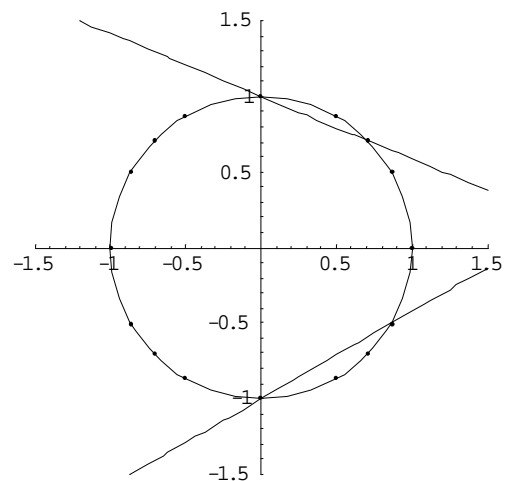
passa per $(0,1)$ e $(1/(\sqrt{2}-1))$ e interseca la circonferenza negli angoli di 90° e 45° .

Nel grafico delle due rette scegliamo la posizione $(0,0)$ come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{-c + \sqrt{3}s + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{2})c + \sqrt{2}s - \sqrt{2}} < 0$$

al posto di c il valore 0 e al posto di s il valore 0 e valutiamo che è vera. Le soluzioni sono pertanto

$$S = (45^\circ + k360^\circ, 90^\circ + k360^\circ) \cup (270^\circ + k360^\circ, 330^\circ + k360^\circ)$$



Esempio numero 2

Risolvere la disequazione

$$\frac{4\cos^2(x) + 4\sin(x) - 1}{-\cos(x) - \sin(x) - 1} > 0$$

Poniamo per comodità $\sin(x)=s$ e $\cos(x)=c$ e disegniamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$$4c^2 + 4s - 1 = 0$$

e si tratta di una parabola con vertice in $(0,1/4)$ e passante per $(\pm 1, -3/4)$ che interseca la circonferenza negli angoli di 210° e 330° . La seconda

$$-c - s - 1 = 0$$

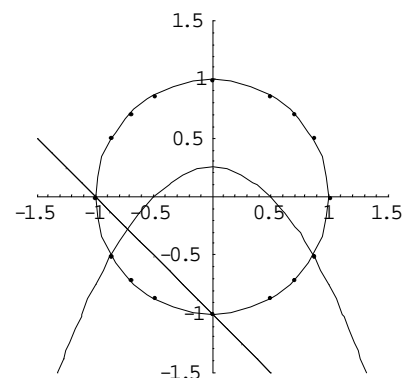
è una retta che passa per $(0,-1)$ e $(-1,0)$ e interseca la circonferenza negli angoli di 180° e 270° .

Nel grafico delle due curve scegliamo la posizione $(0,0)$ come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{4c^2 + 4s - 1}{-c - s - 1} > 0$$

al posto di c il valore 0 e al posto di s il valore 0 e valutiamo che è vera. Le soluzioni sono pertanto

$$S = (180^\circ + k360^\circ, 210^\circ + k360^\circ) \cup (270^\circ + k360^\circ, 330^\circ + k360^\circ)$$



Esempio numero 3

Risolvere la disequazione

$$\frac{2\sqrt{3}\sin^2(x) + \cos(x)}{\sqrt{2}\cos^2(x) + \sin(x)} < 0$$

Poniamo per comodità $\sin(x)=s$ e $\cos(x)=c$ e disegniamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$$2\sqrt{3}s^2 + c = 0$$

e si tratta di una parabola con vertice in $(0,0)$, asse orizzontale e passante per $(-1, \pm\text{rad}3/6)$ che interseca la circonferenza negli angoli di 150° e 210° .

La seconda

$$\sqrt{2}c^2 + s = 0$$

è una ancora una parabola con vertice nell'origine con asse verticale che interseca la circonferenza negli angoli di 225° e 315° .

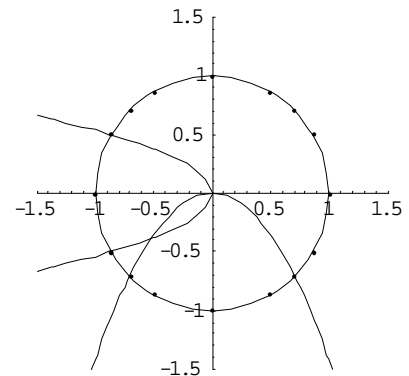
Nel grafico delle due coniche scegliamo la posizione $(1,1)$ come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{2\sqrt{3}s^2 + c}{\sqrt{2}c^2 + s} < 0$$

al posto di c il valore 1 e al posto di s il valore 1 e valutiamo che è falsa.

Le soluzioni sono pertanto

$$S = (150^\circ + k360^\circ, 210^\circ + k360^\circ) \cup (225^\circ + k360^\circ, 315^\circ + k360^\circ)$$

**Esempio numero 4**

Risolvere la disequazione

$$\frac{4\cos(x)\sin(x) - \sqrt{3}}{\sin(x) - \sqrt{2}\cos^2(x)} \leq 0$$

Poniamo per comodità $\sin(x)=s$ e $\cos(x)=c$ e disegniamo nel piano cartesiano di ascissa c e ordinata s la circonferenza goniometrica di equazione $c^2+s^2=1$ e il grafico delle due curve generate dal numeratore e dal denominatore. La prima è

$$4cs - \sqrt{3} = 0$$

e si tratta di una iperbole equilatera che interseca la circonferenza negli angoli di 60° , 30° , 210° e 240° . La seconda

$$s - \sqrt{2}c^2 = 0$$

è una parabola con asse verticale e vertice nell'origine che interseca la circonferenza negli angoli di 45° e 135° .

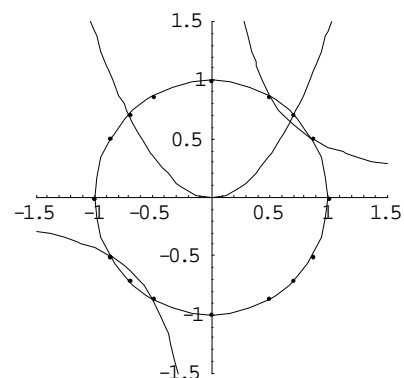
Nel grafico delle tre coniche scegliamo la posizione $(1,1)$ come punto di prova e sostituiamo nella disequazione

$$\frac{4cs - \sqrt{3}}{s - \sqrt{2}c^2} \leq 0$$

al posto di c il valore 1 e al posto di s il valore 1 e valutiamo che è vera.

Le soluzioni sono pertanto

$$S = [30^\circ + k360^\circ, 45^\circ + k360^\circ) \cup [60^\circ + k360^\circ, 135^\circ + k360^\circ) \cup [210^\circ + k360^\circ, 240^\circ + k360^\circ]$$



Esercizi misti

$$\frac{\sin(x) - 2\sqrt{3} \cos^2(x)}{(-2 - \sqrt{3}) \cos(x) - \sin(x) - 1} > 0$$

$$\frac{-3 \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) - \sqrt{3}}{\cos^2(x) + 2 \sin(x) - 2} < 0$$

$$\frac{4 \cos^2(x) + 4 \sin(x) - 2\sqrt{3} - 1}{(2 - \sqrt{2}) \cos(x) - \sqrt{2} \sin(x) + \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{\sqrt{2} \cos(x) + (2 + \sqrt{2}) \sin(x) - \sqrt{2}}{(-2 + \sqrt{3}) \cos(x) - \sin(x) - 1} \leq 0$$

$$\frac{(2 - \sqrt{2}) \cos(x) + \sqrt{2} \sin(x) - \sqrt{2}}{\cos(x) - \sqrt{2} \sin^2(x)} > 0$$

$$\frac{2 \sin^2(x) + (2 - \sqrt{2}) \cos(x) + \sqrt{2} - 2}{\cos^2(x) - \sin^2(x) + 1} \geq 0$$

$$\frac{4 \cos(x) \sin(x) + \sqrt{3}}{-\cos(x) - \sin(x) - 1} \leq 0$$

$$\frac{2 \cos^2(x) + 3 \sin(x)}{-\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) - \sqrt{3}} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) + \sqrt{3}}{-\cos(x) + \sin(x) + 1} \leq 0$$

$$\frac{-\cos(x) - \sin(x) - 1}{2 \cos^2(x) + (2 - \sqrt{2}) \sin(x) + \sqrt{2} - 2} \leq 0$$

$$\csc(x) \sec(x) (\cos(x) - 2\sqrt{3} \sin^2(x)) \leq 0$$

$$\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x) + 1}{-\cos(x) + (2 - \sqrt{3}) \sin(x) + 1} \leq 0$$

$$\frac{2 \cos^2(x) + 2 \sin(x) + \sqrt{2} - 1}{(2 - \sqrt{3}) \cos(x) + \sin(x) - 1} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{3} \cos(x) + 3 \sin(x) - \sqrt{3}}{(-2 + \sqrt{3}) \cos(x) - \sin(x) - 1} > 0$$

$$\frac{(2 - \sqrt{2}) \cos(x) - \sqrt{2} \sin(x) + \sqrt{2}}{\cos(x) - 2\sqrt{3} \sin^2(x)} \geq 0$$

$$\frac{\sin^2(x) + \cos(x) - 1}{2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x) + 1} > 0$$

$$\frac{\cos(x) + \sin(x) - 1}{(-2 + \sqrt{2}) \cos(x) + \sqrt{2} \sin(x) + \sqrt{2}} \leq 0$$

$$\frac{(2 - \sqrt{2}) \cos(x) + \sqrt{2} \sin(x) - \sqrt{2}}{\cos(x) - 2\sqrt{3} \sin^2(x)} > 0$$

$$\frac{2\sqrt{3} \cos^2(x) + \sin(x)}{(-2 - \sqrt{3}) \cos(x) + \sin(x) + 1} \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \csc(x) (-\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$\frac{(-2 - \sqrt{3}) \cos(x) - \sin(x) - 1}{2 \cos^2(x) + (2 - \sqrt{3}) \sin(x) + \sqrt{3} - 2} \leq 0$$

$$\csc(x) \sec(x) (\sqrt{2} \sin^2(x) + \cos(x)) \leq 0$$

$$\frac{2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x) + 1}{-\cos(x) + (2 + \sqrt{3}) \sin(x) + 1} \geq 0$$

$$\frac{4 \cos^2(x) + 4 \sin(x) - 5}{\cos(x) - \sin(x) + 1} \geq 0$$

$$\frac{\cos(x) + (2 - \sqrt{3}) \sin(x) - 1}{(-2 + \sqrt{3}) \cos(x) + \sin(x) + 1} < 0$$

$$\frac{\cos(x) + \sin(x) - 1}{\cos(x) - 2\sqrt{3} \sin^2(x)} > 0$$

$$\frac{2 \sin^2(x) + \cos(x) - 1}{\cos^2(x) - \sin^2(x) + 1} \leq 0$$

$$\frac{4 \cos(x) \sin(x) + \sqrt{3}}{(-2 - \sqrt{3}) \cos(x) - \sin(x) - 1} \leq 0$$

$$\frac{-\sqrt{2} \cos(x) + (-2 - \sqrt{2}) \sin(x) - \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cos(x) + (2 - \sqrt{2}) \sin(x) - \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{2} \sin^2(x)}{4 \cos(x) \sin(x) + \sqrt{3}} < 0$$

$$\frac{2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x) - 1}{-\sqrt{3} \cos(x) + 3 \sin(x) + \sqrt{3}} \leq 0$$

$$\frac{2 \cos^2(x) + 2 \sin(x) - \sqrt{2} - 1}{\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) + \sqrt{3}} \geq 0$$

$$\frac{\cos(x) + (2 + \sqrt{3}) \sin(x) - 1}{-\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) - \sqrt{3}} \geq 0$$

$$\frac{2 \sin^2(x) + (2 - \sqrt{3}) \cos(x) + \sqrt{3} - 2}{\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1} \leq 0$$

$$\frac{2\sqrt{3} \cos^2(x) + \sin(x)}{(-2 - \sqrt{3}) \cos(x) + \sin(x) + 1} \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \csc(x) (-\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$\csc(x) \sec(x) (\sqrt{2} \sin^2(x) + \cos(x)) \leq 0$$